電磁気学における単位系

§0 疑問の発生

電磁気学の理解において意外に高い障壁がその単位系の理解である。単位はそもそも人間が共通の"言葉"で量の大きさを伝達し合うために考案したものであるが，電磁気現象の記述において多くの単位(系)が存在するためにかえって混乱を導き，現象の定式化そのものよりも，単位系という人為的な約束ごとの理解にエネルギーを使わざるを得ないという本末転倒ともいえる状態に陥ることが多い[1]。地球上には膨大な数の言語が存在するが，英語を"共通語"と認識することで，混乱が避けられている。電磁気学にもMKSA系という"標準語"が存在するが，分野によっては"昔の標準語"である別の単位系が依然として使われている(新刊書でも，分野によってはごく自然に使われているものもある)。名著あるいは古典と呼ばれる成書をひもといて，基本的な事項を勉強しようとすると，多くの場合，式の形や単位系が自分の(最新のSI単位系で)受けた教育における単位系と異なるために混乱してしまうことになる。単位系をきちんと理解しなければ，ある式にいろいろな物理量の値を代入して計算することもできなくなる。あるいは，ある単位系で書かれた式を別の単位系の式として変換するためにも単位系の理解は必須である。本書は，(特に電磁気学)単位系を自由に行き来できるような"ワザ"を習得するために書かれたmonographである。

§1 単位系の種類とその設定

電磁気量の単位設定は，電磁気量と力学量の関係を表す物理法則式から始める。
電気量(電荷)に対するクーロンの法則

$$F = \frac{1}{\alpha}\frac{qq'}{r^2} \tag{1}$$

磁気量(磁荷)に対するクーロンの法則

$$F = \frac{1}{\beta}\frac{mm'}{r^2} \tag{2}$$

電流と磁荷の相互作用[2]

$$F = \frac{1}{\gamma}\frac{mi}{r} \tag{3}$$

Fは力，qは電荷，mは磁荷(磁気量)，iは電流[$q = it$ (tは時間)]，rは距離である。また，α, β, γは比例定数であり，単位系ごとに定められる。式(1)〜(3)より次式が成立する。

---

1 少なくとも筆者は大学教養時代の「電磁気学」の講義の時点からその"罠"に陥った一人である
2 ビオ・サバールの法則を積分した結果としての磁場[∝ (電流)/(距離)]と磁荷 m の相互作用。

$$\frac{\gamma^2}{\alpha\beta} = \left(\frac{r}{t}\right)^2 = c_0^2 \tag{4}$$

ここで，c_0は真空中の光速である(このことから，α, β, γはすべて独立ではないことがわかるであろう)。

電気系の量に誘電率を考え，磁気系の量に透磁率を考えて[1]，α, β, γをそれぞれ

$$\alpha = k_1\varepsilon_0 \tag{5}$$

$$\beta = k_2\mu_0 \tag{6}$$

$$\gamma = k_3K \tag{7}$$

とおく(状態は真空を想定)。真空でない場合，誘電率も透磁率も物質に依存する。Kは媒体には無関係な連結因子と呼ばれる定数であり，次の関係を満たす。

$$K^2 = \varepsilon_0\mu_0c_0^2 \tag{8}$$

従って，常に

$$k_3^2 = k_1k_2 \tag{9}$$

が成立しなければならない。

電磁気学における単位系は，上記の関係に対して，

[1] 基本単位(CGS か MKSA か)
[2] 独立量(MKSA か esu か emu か Gauss か)
[3] 定数値(有理か非有理か)

の各選定をどのように行うかによって決まることになる。

[1]は，単位を cm, g, sec で統一するのか，m, kg, sec, A(C)で統一するかということであり，(3元，4元という違いはあるものの)数値の大きさに関わることなので大きな問題とはならない。

一方，[2]は非常に重要であり，電気的量にかかわるもの(例えばε_0)をまず定義してからその他のものを決めていくのか(esu 単位系; **E**lectro**s**tatic system of **u**nits), あるいは逆に，磁気量にかかわるもの(例えばμ_0)を定義してから他のものを決めていくのか(emu 単位系; **E**lectro**m**agnetic system of **u**nits), あるいは両方(ε_0とμ_0)とも定義してから進めるのか(Gauss 系)，はたまた電流のような量を独立量に選んで，ε_0とμ_0を与えていくのか(MKSA 単位系)というような様々なバリエーションがあり，それに応じて物理量の単位(次元)だけでなく，理論式の形も変わってくることになる。

[3]の定数値というのは，式(5)〜(7)に現れた各定数 k の決め方を意味している。k =

[1] 現段階では，誘電率も透磁率もその単位と大きさは未定としてよい。

4πとする場合を有理系といい，$k=1$とする場合を非有理系という。これらは，理論式の見かけの美しさに関わる問題で本質的な問題ではないが, 本を読むときや式を実際に扱うときに(特に数値を代入して物理量の大きさを求めようとするとき)，どちらの系で書かれたものかを知っておかないと正しい値を得ることができなくなる。有理系では, クーロンの法則や, ビオ・サバールの法則に$1/(4\pi)$が現れて一見煩わしいようであるが, 逆にマクスウェル方程式に4πが現れず, 見かけがきれいになる。非有理系はこの逆で, クーロンの法則はスッキリしているが，マクスウェル方程式に4πが現れる。通常，esu, emu, Gauss 系は非有理，MKSA 系は有理系で書かれる。

次に，独立量の取り方による単位系の組み立て方の違いを見ていく。

1) MKSA(MKSQ ともいう)単位系

・基本単位は m, kg, sec，A(または C)である。

・通常は有理系として, $k_1 = k_2 = k_3 = 4\pi$にとる。つまり, $\alpha = 4\pi\varepsilon_0$, $\beta = 4\pi\mu_0$, $\gamma = 4\pi K$ である。

・独立量は電流(または電荷)であり，誘電率は

$$\varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c'^2_0} = \frac{10^{11}}{4\pi c_0^2}\ \mathrm{N^{-1}\ C^2\ m^{-2}} \tag{10}$$

と定義される。ここでc'_0は $\mathrm{m\ s^{-1}}$単位の真空中光速の"数値"2.99792458×10^8(無次元！)であり，c_0は $\mathrm{cm\ s^{-1}}$単位の光速の"数値"2.99792458×10^{10}(無次元！)である[1]。また，この単位系での連結因子は$K=1$にとられるから，透磁率は,

$$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{N\ A^{-2}} = 4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{kg\ m\ C^{-2}} \tag{11}$$

となる。従って，式(8)より，$(\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2}$が光速に等しく，その大きさは $2.99792458\times10^8\ \mathrm{m\ s^{-1}}$となる。

2) CGS esu(CGS 静電単位系)

・基本単位は cm, g, sec である。

・通常は非有理系として，$k_1 = k_2 = k_3 = 1$にとる。つまり，$\alpha = \varepsilon_0$, $\beta = \mu_0$, $\gamma = K$である。

・独立量として真空誘電率をとり，$\varepsilon_0 = 1$(無次元)とする。連結因子は$K=1$である。従って，式(8)よりμ_0は,

$$\mu_0 = c_0^{-2} \tag{12}$$

となる。なお, ここのc_0は真空中の光速($2.99792458\times10^{10}\ \mathrm{cm\ s^{-1}}$, 次元あり)である。

---

[1] 光速が速度という時限をもつ物理量ではなく，無次元の数字として扱われることに注意が必要である。

このように，透磁率μ_0は cm^{-2} s^{2}という単位をもつ物理量となる。

3) CGS emu(CGS 電磁単位系)

・基本単位は cm, g, sec である。

・通常は非有理系として，$k_1 = k_2 = k_3 = 1$にとる。つまり，$\alpha = \varepsilon_0$, $\beta = \mu_0$, $\gamma = K$である。(ここまでは CGS esu と同じ)。

・独立量として真空透磁率をとり，$\mu_0 = 1$(無次元)とする。連結因子は$K = 1$である。これよりε_0は,

$$\varepsilon_0 = c_0^{-2} \tag{13}$$

となる。なお, ここの c_0は真空中の光速(2.99792458×10^{10} cm s^{-1}, 次元あり)である。CGS emu の場合とは逆に誘電率ε_0が cm^{-2} s^{2}という単位をもつ物理量となる。

4) Gauss 単位系

・基本単位は cm, g, sec である。

・通常は非有理系として，$k_1 = k_2 = k_3 = 1$にとる。つまり，$\alpha = \varepsilon_0$, $\beta = \mu_0$, $\gamma = K$である(ここまでは ems や esu と同じ)。

・独立量として，真空誘電率ε_0と真空透磁率μ_0をいずれも1(無次元)にとる。このため連結因子は自動的に$K = c_0 = 2.99792458\times10^{10}$ cm s^{-1}(次元あり)となる。

次に単位系の歴史的経緯を見ておく。

・MKSA 単位系

1930年代に，CGS 単位系にまさる単位系として確立されて以来，最も実用的な単位系として認められるようになった。

・Gauss 単位系

Planck の著書以来，しばしば使われるようになり，最近では MKSA 系に次いで用いられている。

・ローレンツ–ヘビサイド単位系

Gauss 単位系的に電気的な量には CGS esu を，磁気的な量には CGS emu を使うが，有理系になっている。ヘビサイド(O. Heaviside)が1882–83年に有理単位系を提案し(1883年著書「電磁論」)，ローレンツ(H. A. Lorentz)が再編成したもので, 有理単位系の元祖的単位系である。一時期広く使われたが, (G. Giorgi による)MKSA 単位系に主流が移行した。

・一般化 CGS 静電単位系(一般化 CGS esu)

CGS esu を MKSA 系にならって4元系としたもの。cm, g, sec, Fr を基本単位として採用する(Fr はフランクリン)。CGS esu から MKSA 系への移行の過渡的措置として，SUN 委員会(国際記号単位述語委員会)が採択したもの。それまで esu 電荷単

位には名称はなかったが，esu 電荷にだけ Fr(フランクリン)という単位が与えられた。

・一般化 CGS 電磁単位系(一般化 CGS emu)
CGS emu を MKSA 系にならって4元系としたもの。cm, g, sec, Bi を基本単位として採用する(Bi はビオ)。それまで emu には特定名称の単位はなかったが，emu の電流にだけ Bi(ビオ)という単位が与えられた。

§2 電場と磁場の対応(*E*–*H* 対応と *E*–*B* 対応)

電磁気学の単位に関するもう1つ重要な点として，電気的な量と磁気的な量の対応の問題がある。電気量としての電荷に対応するものとして，磁気量として"磁荷"を考え，"磁荷"に対するクーロンの法則を基本とする立場が ***E*–*H*** 対応と呼ばれるものである。しかし，磁荷は電荷と違って，単独の磁荷のみ(つまり単独の N 極あるいは S 極のみ)を取り出すことはできない。従って，現実には"磁荷"は存在しない。しかし，理論的扱いにおいては，$q \leftrightarrow q_{\mathrm{m}}$, $\varepsilon_0 \leftrightarrow \mu_0$, $E \leftrightarrow H$(さらには $D \leftrightarrow B$)という対応をつけると，電気と磁気を同じ形式で表現できることからこの立場(***E*–*H*** 対応)が存在する。別の言い方をすれば，***E*–*H*** 対応は磁石が作る磁場を出発点とした立場ということもできる。***E*–*H*** 対応での磁気に関するクーロンの法則は

$$F = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{q_m q'_m}{r^2} \tag{13}$$

と表され，電荷のクーロンの法則との比較から，q_{m}(Wb)[1]と q'_{m}(Wb)という磁荷間に力 F が働くということができる。このとき磁荷 q'_{m} に基づく磁場 H が(電場 E と同様のセンスで)導入され，

$$H = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{q'_m}{r^2} \tag{14}$$

という形になる。つまり，

$$F = q_m H \tag{15}$$

である。磁束密度 B はμ_0を介して H と結ばれ，

$$B = \mu_0 H \tag{16}$$

となる。

一方の ***E*–*B*** 対応の立場は，磁石の基本が磁荷ではなく(円)電流であるとし，磁荷というものを考えない。力を与える基本法則は，クーロンの法則ではなく，アンペールの力であり，磁場(正確には磁束密度)がビオ・サバールの法則により与えられる。つまり ***E*–*B*** 対応は，電流が作る磁場を出発点とした立場である[2]。アンペールの力は次式で表

---

[1] Wb(ウェーバー) = N A^{-1} m
[2] もちろん，磁石が作る磁場も電流が作る磁場も本質は同じものである。

される。

$$\boldsymbol{F} = I\Delta\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{B} \tag{17}$$

ここで I は電流，$\Delta\boldsymbol{s}$ は電流の方向に沿う方向の素片の長さ，$\boldsymbol{B}$ は磁束密度である[1]。この式は $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応での $F = q_\mathrm{m}H$ に対応する式と見ることもできるから，$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応では，電流素片 $I\Delta s$ を一種の磁荷，B を磁場と考えていることになる[2]。また，$\boldsymbol{B}$ はビオ・サバールの法則により，

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{R}}{R^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{e}_R}{R^2} \tag{18}$$

で表される。$\boldsymbol{R}$ は電流素片 $I\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ から距離 R 離れた場所の位置ベクトルである。具体的に $\boldsymbol{B}$ を計算すると，素片 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ に関する積分の結果，スカラー量としての B が R^{-1}の依存性をもつことが多い。$\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H}$ より，

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H} = \frac{I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{R}}{R^3} \tag{19}$$

として磁場を定義することはできるが，この H が作用して力 F がはたらく対象として磁荷を考えなくてはならず，それでは $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応の立場になってしまうので，ここで書いたような $\boldsymbol{H}$ を作ることは，$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応という立場をとる場合は consistent ではない。そこで，$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応で磁気のクーロンの法則を示すことを考えてみよう。$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応で書かれたクーロンの法則

$$F = q_m H \tag{20}$$

に同形の式として，$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応でのクーロンの法則の式を，

$$F = \xi B \tag{21}$$

という形にとって，新しい磁荷ξを形式的に導入すると，真空中では $B = \mu_0 H$ であるから，$F = \mu_0\xi H$ となり，$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応の磁荷ξは $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応の磁荷 q_m とは(μ_0の分だけ)次元も値も異なるものになる。つまり，

$$\xi = \frac{q_m}{\mu_0} \tag{22}$$

であり，ξの単位は A m，一方，q_m の単位は N A^{-1} m (= Wb)となる。そもそも磁荷というものを考えない $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応において，あえて磁荷というものを考えてみたが次元も値も異なってしまったということであるから当然といえば当然であり，むしろ，磁荷というものにこれだけの違いを設けたことによって，E と B が $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応でも $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応

[1] この式は有名な「フレミングの左手の法則」を表したものである。中指 $= \Delta\boldsymbol{s}$，人差し指 $= \boldsymbol{B}$，親指 $= \boldsymbol{F}$ という対応であるが，外積を習得していれば「フレミング」を持ち出す必要はない。$\Delta\boldsymbol{s}$ と $\boldsymbol{B}$ のなす角が鈍角になると，指が痛いので，やはり外積で考える方がよい。

[2] $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応では B を単に磁場と呼ぶことが多い。正しくは，H を「磁場の強さ」，B を「磁束密度」と呼ぶべきである。

でも同じ次元と値をもつことができていると考えるべきである[1]。

仮想的な磁荷とは異なり，一般の物理量でも $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応と $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応とで定義が変わるものがあるということに注意する必要がある[2]。その典型例が磁化である。$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応での磁化 P_{m} は，次式で与えられる。

$$B = \mu_0 H + P_m \tag{23}$$

これは，電気(静電)系の関係式

$$D = \varepsilon_0 E + P \tag{24}$$

における分極 P と磁気系の磁化 P_{m} が対応していることを表している(D は電束密度，E は電場，P は分極)。

一方，$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応の場合は，H を次式で導入し，

$$H = \frac{1}{\mu_0} B - M \tag{25}$$

この式中の M を磁化と呼ぶ。つまり，

$$B = \mu_0 (H + M) = \mu_0 H + \mu_0 M \tag{26}$$

であり，式(23)と式(26)から，

$$M = \frac{P_m}{\mu_0} \tag{27}$$

という関係が得られ，同じ磁化と呼ばれる物理量でも，$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応と $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応とで同じものにはならず，μ_0倍の違いが生じることになる(μ_0は$4\pi\times10^{-7}$ N A^{-2}というような数値であるからこの差は大きい)。どちらの対応で定義された式かということを認識して式を扱わなければ, 大きい間違いを引き起こす危険がある。当然ながら, 式(27)は式(22)の関係と同形になっている。

§3 単位の換算係数の決定

以下では，実際にいろいろな単位系での式や単位間の変換を行ってみる。まず，最も基本的な，MKSA 系の C(クーロン)と CGS esu 系の esu との変換を行う[3]。この場合，基本になるのはやはりクーロンの法則である。つまり，MKSA 系では，

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{28}$$

であり，CGS esu では，

---

[1] 単位系ごとに電場や磁場が異なる値をもってしまうと大混乱を招くであろう。

[2] 前述のように仮想的な磁荷というものの表現が異なるということではなく, 実際の(観測)物理量の定式化の問題である。

[3] 電荷の単位としての esu をフランクリン(Fr)と呼ぶ場合がある(1961年 SUN 委員会採択)。

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{29}$$

となる。両者は現象としてはまったく同じ状態を表しているが，基本となる単位が異なるために，両左辺の F の値が異なる尺度で測られているという違いがある。身近な例で説明すると，同じ長さを表現するためにメートル(m)を使った場合とセンチメートル(cm)を使った場合とでは, x m = x' cm となるが, 数値部分の x と x'の関係は, m = 100 cm より

$$x = x'\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{m}} = \frac{x'}{100} \tag{30}$$

つまり，$100x = x'$となっている。当然ながら，物理量を表現する単位のサイズが大きいほど数値(測定値)は小さくなるのである[1]。一見当たり前のことであるが，ここで重要なことは，物理法則式を数値(測定値)間の関係式と見なすとき，cm の単位をもつ物理量として x'で書かれた部分を$100x$ と置き換えれば，m 単位で測られる物理量 x で書かれた式に変換できるということである。

さて，上記のクーロンの法則式を数値方程式と見なすために，MKSA で書かれた(つまり N で測られた力 F)と CGS esu で書かれた(dyn で測られた力 F)を区別するために後者にプライム記号(')を付けて，

$$F' = \frac{q'_1 q'_2}{r'^2} \tag{31}$$

と書くことにする。MKSA の式(28)を既知の単位間の換算関係を用いて変形し，CGS esu の式を抜き取ることで，未知の C と esu の単位としての大きさの比を求めることができる。まず，式(28)に現れた物理量に関して，

$$F\,\mathrm{N} = F'\,\mathrm{dyn} \longrightarrow F = F'\frac{\mathrm{dyn}}{\mathrm{N}} \tag{32}$$

$$q\,\mathrm{C} = q'\,\mathrm{esu} \longrightarrow q = q'\frac{\mathrm{esu}}{\mathrm{C}} \tag{33}$$

$$r\,\mathrm{m} = r'\,\mathrm{cm} \longrightarrow r = r'\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{m}} \tag{34}$$

という置き換えを行う。また, 式(10)より $\varepsilon_0 = 10^{11}\big/(4\pi c_0^2)$ であるから, これらを式(28)に代入して次式を得る。

[1] これを単位と測定値の反傾的関係と呼ぶ。

$$F'\left(\frac{\mathrm{dyn}}{\mathrm{N}}\right)=\frac{1}{4\pi}\frac{4\pi c_0^2}{10^{11}}\frac{q'_1 q'_2\left(\frac{\mathrm{esu}}{\mathrm{C}}\right)^2}{r'^2\left(\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{m}}\right)^2} \tag{35}$$

変形しようとしている式が数値関係式であるから，変換後[つまり，(')が付いた文字ばかりに変形したとき]残す文字以外は完全に数値として扱ってよい。例えば，ε_0は目標とする式には残らないから，その次元(単位)は気にする必要がない。ただし，ここでのc_0は cm s^{-1}単位での光速の速度の"数値"である。従って，

$$F'\left(\frac{1}{10^5}\right)=\frac{c_0^2}{10^{11}\times10^{-4}}\frac{q'_1 q'_2}{r'^2}\left(\frac{\mathrm{esu}}{\mathrm{C}}\right)^2 \tag{36}$$

さらに変形して，

$$F'=\frac{10^5 c_0^2}{10^{11}\times10^{-4}}\frac{q'_1 q'_2}{r'^2}\left(\frac{\mathrm{esu}}{\mathrm{C}}\right)^2=\frac{c_0^2}{10^2}\frac{q'_1 q'_2}{r'^2}\left(\frac{\mathrm{esu}}{\mathrm{C}}\right)^2 \tag{37}$$

この式から，CGS esu のクーロンの式を抜き取ると(言い換えると，$F'=q_1'q_2'/r'^2$ を代入すると),

$$\left(\frac{\mathrm{esu}}{\mathrm{C}}\right)^2=\frac{10^2}{c_0^2} \tag{38}$$

つまり,

$$\frac{\mathrm{esu}}{\mathrm{C}}=\frac{10}{c_0} \tag{39}$$

従って,

(電荷)

$$\boxed{\mathrm{esu}=\frac{10}{c_0}\mathrm{C}\ \text{または}\ \mathrm{C}=\frac{c_0}{10}\mathrm{esu}} \tag{40}$$

が得られる。当然ながら，m s^{-1}単位で表した光速の"数値"c'_0を用いれば,

$$\mathrm{esu}=\frac{1}{10c'_0}\mathrm{C}\ \text{または}\ \mathrm{C}=10c'_0\,\mathrm{esu} \tag{41}$$

となるが，いずれの光速値を用いた表現も C と esu の関係という意味ではまったく同じことを表しており，どちらかが誤りというわけではない。

ここで最も重要なことは，単位換算表などに，1 C = 2.99792458×10^9 esu などと

書かれているのは，単なる約束ごと，つまり1 m = 100 cm というような変換とは意味が異なるという点である。

上記の C と esu の変換はあまりにも有名であり，換算表を見ても知ることができる関係なので, 以下ではやや特殊なケースを扱うことにする。MKSA 系の C と CGS emu 系での電荷の単位の関係はどのようになるであろうか。emu 系での電荷の単位には名前がないので，ここでは単に「emu 電荷」と書くことにする。まず，MKSA 系では，クーロンの法則は,

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{42}$$

一方，CGS emu 系でのクーロンの法則は,

$$F' = \frac{1}{\varepsilon'_0}\frac{q'_1 q'_2}{r'^2} \tag{43}$$

である。前回のケースと同様に変形していくと,

$$F'\left(\frac{\text{dyn}}{\text{N}}\right) = \frac{1}{4\pi}\frac{4\pi c_0^2}{10^{11}}\frac{q'_1 q'_2\left(\frac{\text{emu電荷}}{\text{C}}\right)^2}{r'^2\left(\frac{\text{cm}}{\text{m}}\right)^2} \tag{44}$$

式(13)にあるように，$\varepsilon'_0 = c_0^{-2}$ であることを考慮して,

$$F'\left(\frac{1}{10^5}\right) = \frac{1}{10^{11}\times\varepsilon'_0\times 10^{-4}}\frac{q'_1 q'_2}{r'^2}\left(\frac{\text{emu電荷}}{\text{C}}\right)^2 \tag{45}$$

つまり,

$$F' = \frac{10^5}{10^{11}\times\varepsilon'_0\times 10^{-4}}\frac{q'_1 q'_2}{r'^2}\left(\frac{\text{emu電荷}}{\text{C}}\right)^2 = \frac{1}{10^2}\frac{1}{\varepsilon'_0}\frac{q'_1 q'_2}{r'^2}\left(\frac{\text{emu電荷}}{\text{C}}\right)^2 \tag{46}$$

この式から，CGS emu のクーロンの式を抜き取ると(つまり，式(43) $F' = (1/\varepsilon'_0)(q_1' q_2'/r'^2)$ を代入すると),

$$\left(\frac{\text{emu電荷}}{\text{C}}\right)^2 = 10^2 \tag{47}$$

つまり,

$$\frac{\text{emu電荷}}{\text{C}} = 10 \tag{48}$$

従って,

$$(\text{電荷})\quad \boxed{\text{emu電荷} = 10\,\text{C} \text{ または } \text{C} = \frac{\text{emu電荷}}{10}} \tag{49}$$

となる。このようなあまり見かけない換算も，上記の方法で簡単に行うことができる。

ここまでは電気量の方を中心に扱ってきたので，次に，MKSA 系の磁気量 Wb(= N A^{-1} m)と CGS emu の磁気量(emu)の間の変換を行ってみる。単位換算の問題は ***E–H*** 対応か ***E–B*** 対応かということにはよらないので, 比較的理解しやすい ***E–H*** 対応で考えることにする。MKSA 系の磁気のクーロンの法則は,

$$F = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{q_{m1}q_{m2}}{r^2} \tag{50}$$

であり，CGS emu 系では,

$$F' = \frac{q'_{m1}q'_{m2}}{r'^2} \tag{51}$$

である。これまでと同様に変形を進めると,

$$F'\left(\frac{\text{dyn}}{\text{N}}\right) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{4\pi\times10^{-7}}\frac{q'_{m1}q'_{m2}\left(\frac{\text{emu}}{\text{Wb}}\right)^2}{r'^2\left(\frac{\text{cm}}{\text{m}}\right)^2} \tag{52}$$

となる。ここで，μ_0には$4\pi\times10^{-7}$を代入した。変形を続けて,

$$F'\left(\frac{1}{10^5}\right) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{4\pi\times10^{-7}\times10^{-4}}\frac{q'_{m1}q'_{m2}}{r'^2}\left(\frac{\text{emu}}{\text{Wb}}\right)^2 \tag{53}$$

さらに,

$$F' = \frac{10^5}{(4\pi)^2\times10^{-7}\times10^{-4}}\frac{q'_{m1}q'_{m2}}{r'^2}\left(\frac{\text{emu}}{\text{Wb}}\right)^2 = \frac{10^{16}}{(4\pi)^2}\frac{q'_{m1}q'_{m2}}{r'^2}\left(\frac{\text{emu}}{\text{Wb}}\right)^2 \tag{54}$$

となり，この式から，CGS emu でのクーロンの式[式(51)]を抜き出すと,

$$\left(\frac{\text{emu}}{\text{Wb}}\right)^2 = \frac{(4\pi)^2}{10^{16}} \tag{55}$$

が残る。つまり

$$\frac{\mathrm{emu}}{\mathrm{Wb}} = \frac{4\pi}{10^8} \tag{56}$$

であるから，

$$(\text{磁荷}) \quad \boxed{\mathrm{emu} = \frac{4\pi}{10^8}\mathrm{Wb} \text{ または } \mathrm{Wb} = \frac{10^8}{4\pi}\mathrm{emu}} \tag{57}$$

が得られる。これは，磁気量に関する MKSA 系と CGS emu の間の換算である。

CGS emu の磁束には Mx(マクスウェル)という名前が付いた単位があり，これと MKSA 系の磁束の単位である Wb の間の換算は換算表にも掲載されているので，現在の方法で確認しておくことにする。磁束は，磁束密度を面積積分したものであるから，まず磁束密度から考える。磁束密度は，MKSA 系においては磁場 H と透磁率から

$$B = \mu_0 H \tag{58}$$

と書ける。一方，CGS emu での関係式は$\mu_0 = 1$であるから

$$B' = H' \tag{59}$$

である。これらの間の換算を行うには，それぞれの磁場 H と H'の関の換算関係が必要になるが，それはまだ得ていない。そこで，先に磁場の単位の換算を行う。MKSA 系の H は

$$H = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{q_m}{r^2} \tag{60}$$

と書け，単位は A m^{-1}である。一方，CGS emu での磁場 H'は

$$H' = \frac{q'_m}{r'^2} \tag{61}$$

であり，単位は dyn emu^{-1} = dyn$^{1/2}$ cm^{-1}である。これには名称が与えられており，Oe(エルステッド)と呼ばれる。これらの間の換算には q_m と q'_m つまり Wb と emu の換算が必要であるが，これは直前の例で換算を行ったのでその結果(emu = $4\pi\times10^{-8}$ Wb)を使えばよい。式(60)の変形を行って，

$$H'\left(\frac{\mathrm{Oe}}{\mathrm{A\ m^{-1}}}\right) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{4\pi\times10^{-7}}\frac{q'_m\left(\dfrac{\mathrm{emu}}{\mathrm{Wb}}\right)}{r'^2\left(\dfrac{\mathrm{cm}}{\mathrm{m}}\right)^2} \tag{62}$$

$$H'\left(\frac{\mathrm{Oe}}{\mathrm{A\ m^{-1}}}\right)=\frac{4\pi\times10^{-8}}{(4\pi)^2\times10^{-7}\times10^{-4}}\frac{q'_m}{r'^2} \tag{63}$$

従って,

$$\frac{\mathrm{Oe}}{\mathrm{A\ m^{-1}}}=\frac{4\pi\times10^{-8}}{(4\pi)^2\times10^{-7}\times10^{-4}}=\frac{10^3}{4\pi} \tag{64}$$

これより,

(磁場の強さ) $$\boxed{\mathrm{Oe}=\frac{10^3}{4\pi}\mathrm{A\ m^{-1}}\ \ \text{または}\ \ \mathrm{A\ m^{-1}}=\frac{4\pi}{10^3}\mathrm{Oe}} \tag{65}$$

を得る。これを用いて磁束密度の換算を行う。磁束密度には MKSA 系, CGS emu いずれにおいても単位に名称が与えてあり, 前者では T(テスラ), 後者では G(ガウス)である。従って, 式(58)から

$$B'\left(\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{T}}\right)=4\pi\times10^{-7}H'\left(\frac{\mathrm{Oe}}{\mathrm{A\ m^{-1}}}\right) \tag{66}$$

となり, 直前の H に関する換算の結果[式(65)]を利用して,

$$B'\left(\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{T}}\right)=4\pi\times10^{-7}\times\frac{10^3}{4\pi}H'=10^{-4}H' \tag{67}$$

CGS emu 系の式 $B'=H'$ を抜き出せば,

$$\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{T}}=10^{-4} \tag{68}$$

従って,

(磁束密度) $$\boxed{\mathrm{G}=10^{-4}\mathrm{T}\ \text{または}\ \mathrm{T}=10^4\mathrm{G}} \tag{69}$$

となり, 電磁気学の単位換算表で見かける G と T の関係が得られる。

いよいよ当初の目的であった磁束の換算を考えよう。磁束を表す式は系によらず

$$\Phi=\int \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\,dS \tag{70}$$

であるから, MKSA 系の Wb と CGS emu の Mx の間の換算は

$$\Phi'\left(\frac{\mathrm{Mx}}{\mathrm{Wb}}\right) = \int \boldsymbol{B}'\left(\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{T}}\right) \cdot \boldsymbol{n}\, dS'\left(\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{m}^2}\right) \tag{71}$$

となり，G と T の換算が上で示したように，G = 10^{-4} T であるから，

$$\Phi'\left(\frac{\mathrm{Mx}}{\mathrm{Wb}}\right) = 10^{-4} \times 10^{-4} \int \boldsymbol{B}' \cdot \boldsymbol{n}\, dS' \tag{72}$$

これより，

$$\frac{\mathrm{Mx}}{\mathrm{Wb}} = 10^{-8} \tag{73}$$

つまり，

$$\text{(磁束)} \quad \boxed{\mathrm{Mx} = 10^{-8}\,\mathrm{Wb} \quad \text{または} \quad \mathrm{Wb} = 10^{8}\,\mathrm{Mx}} \tag{74}$$

が得られる。

以上の換算で注意すべき点は，MKSA 系では，次元が同じである磁気量と磁束が両方とも Wb という名称で呼ばれるにもかかわらず, CGS emu では磁束に Mx という単位名称があるだけで，磁気量には名称がない点である。MKSA 系と同様に，CGS emu の磁気量にも Mx という名称をあててもよいと思いがちであるが, 磁気量間の換算と磁束間の換算係数は同じにならない。上で見たように，磁気量間の換算は,

$$\mathrm{Wb} = \frac{10^8}{4\pi}\,\mathrm{emu} \tag{75}$$

であり，磁束間の換算は,

$$\mathrm{Wb} = 10^8\,\mathrm{Mx} \tag{76}$$

であるから，4π分だけ換算係数に違いがある。

§4 単位系間の式の関係

以上では，単位間の換算ということを扱ったが，単位系間での式変換を行うにはどうすればいいのであろうか，例えば，Maxewell の方程式は MKSA 系では,

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{77}$$

と表されるが，これを Gauss 単位系の表記にするにはどうすればいいであろうか。実は，このような場合でも，基本的には上述したような単位換算の原理に従えばよいのである。∇ も E も B も最終的に式に残るものであるから，これらの間の単位系間の換算

をつかんでおく必要がある。Gauss 単位系では，電気に関する量は CGS esu 単位で扱うから，これまでに行ったのと同様の方法で，MKSA の電場(E)と Gauss 系の電場(E')に付く単位の間の換算関係を求めると(ここでは細かく示さないが),

$$\text{esu電場}(\text{dyn}^{1/2}\ \text{cm}^{-1}) = \frac{c_0}{10^6}\text{MKSA電場}(\text{N C}^{-1}) \tag{78}$$

単位と数値(観測値)は反傾性があるから E と E'の置き換え関係は,

$$E = \frac{c_0}{10^6}E' \tag{79}$$

となる。また，B に関しても，上の例で見たように，B の単位である T と B'の単位である G の間には,

$$\text{G} = 10^{-4}\,\text{T} \tag{80}$$

の関係[式(69)]があるから，B と B'の置き換えの式は,

$$B = 10^{-4}B' \tag{81}$$

である。最後に，∇について考える。∇は

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \tag{82}$$

という形であるから，∇は m^{-1}単位であり，∇'が cm^{-1}単位であることを考慮すると，$\text{cm}^{-1} = 10^2\ \text{m}^{-1}$より,

$$\nabla = 10^2\nabla' \tag{83}$$

となる。これらを MKSA の式に代入すると,

$$10^2\nabla'\times\frac{c_0}{10^6}\boldsymbol{E}' = -10^{-4}\frac{\partial\boldsymbol{B}'}{\partial t} \tag{84}$$

$$\nabla'\times\boldsymbol{E}' = -\frac{1}{c_0}\frac{\partial\boldsymbol{B}'}{\partial t} \tag{85}$$

これで，Gauss 単位系で表した Maxwell の方程式(のうちの一つ)の変換ができたことになる。ここで示した一例だけでも，MKSA と Gauss 系のクーロンの法則の式だけを比較して，「MKSA で書かれた式を Gauss 系で書かれた式に書き換えるには，MKSA の式に現れる$4\pi\varepsilon_0$の部分を1に置き換えればよい」というような対処療法がいかに危険かわかるであろう(式(77)には$4\pi\varepsilon_0$がない)。

式変形への応用問題の最後の例として, MKSA 系の磁気モーメントを Gauss 系で表すことを考える。負電荷の軌道角運動量 $\boldsymbol{p}$ に基づく古典的磁気モーメント μ_m は MKSA 系の場合，次のような表記になる。

$$\mu_{\mathrm{m}} = -\frac{\mu_0 e}{2m}\boldsymbol{p} \tag{86}$$

式中のμ_0は真空の透磁率で$4\pi\times10^{-7}$ N A^{-2}であり，μ_{m}の単位はN A^{-1} m^2(= Wb m)である。なお，この表記は***E–H***対応の式であり，***E–B***対応では

$$\mu_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}\text{対応}) = -\frac{e}{2m}\boldsymbol{p} \tag{87}$$

となり，単位がA m^{2}となるので注意する。つまり，***E–H***対応の"磁荷"が$1/\mu_0$されたことに対応して，μ_{m}が$1/\mu_0$された形になっている[式(22), (27)参照]。磁気モーメントのMKSA系での単位はWb mであり, これをGauss系に変換するには, Wbがemu cm(= dyn$^{1/2}$ cm^{-1})に変換できればよい。Wbとemuの変換は先に示したように式(57)の関係があるから,

$$\mathrm{emu\ cm} = \frac{4\pi}{10^8}\mathrm{Wb}\times10^{-2}\,\mathrm{m} = \frac{4\pi}{10^{10}}\mathrm{Wb\ m} \tag{88}$$

となり,

$$\mu_{\mathrm{m}} = \frac{4\pi}{10^{10}}\mu'_{\mathrm{m}} \tag{89}$$

が得られる。Gauss単位系はeという電気量についてはCGS esuを用いるので,

$$\mathrm{esu} = \frac{10}{c_0}\mathrm{C} \tag{90}$$

より

$$e = \frac{10}{c_0}e' \tag{91}$$

質量mはMKSA系がkg，Gauss単位系がgであるから，g = 10^{-3} kgより,

$$m = 10^{-3}m' \tag{92}$$

角運動量pはMKSA系がkg m^2 s^{-1}, Gauss単位系がg cm^2 s^{-1}であるから, g cm^2 s^{-1} = 10^{-7} kg m s^{-1}となり,

$$\boldsymbol{p} = 10^{-7}\boldsymbol{p}' \tag{93}$$

を得る。μ_0はGauss単位系では1となり式の上からは消えるので，そのままの数値を代入する。すべての代入を行うと,

$$\frac{4\pi}{10^{10}}\mu'_{\mathrm{m}} = -\frac{4\pi\times10^{-7}}{2}\frac{\frac{10}{c_0}e'}{10^{-3}m'}10^{-7}\boldsymbol{p}' \tag{94}$$

Gauss 系では c_0は物理量として残り[1]，式を整理すると，

$$\mu'_{\mathrm{m}} = -\frac{e'}{2m'c_0}\boldsymbol{p}' \tag{95}$$

が得られる。これが，Gauss 系での磁気モーメントの式である。

[1] 逆に，Gauss 単位系の式を MSKA 単位系に変換する際には，Gauss 単位系の式に現れた c_0を無次元量 (cm s^{-1}単位の光速の大きさ)としてそのまま残して変形すればよい。

【参考文献】

1) 鈴木範人，小塩高文著「応用光学 II」(朝倉書店) pp.152～156

同書 p.153 表4.1(p.154の表4.2と合わせて使用する)は, 本プリントで行った単位系間の式の変換の結果をまとめたものであり，あらゆる単位系での電磁気学物理量の式をすばやく入手したいときには非常に便利がいいものである。また, ***E*–*H*** 対応, ***E*–*B*** 対応に関しても記述がある。さらに,「MKSA が他のものよりも隔絶してすぐれているかと思い込まれると, それは誤りである。」という立場をとり, 新しい MKSP という単位系(＝MKSA 系と Gauss 系のよいところを組み合わせた単位系)を提唱している(が，残念ながら MKSP はほとんど普及してない)。

2) 広瀬立成著「*E* と *H*，*D* と *B*」(共立出版) pp.23～36

基本として ***E*–*H*** 対応をとった本である(同書の p.23にあるように，電気的な量と磁気的な量の対応のよさを第一に考えて，という部分にそのポリシーが現れており，そもそも本の題名がそうである)。しかし，***E*–*H*** 対応と ***E*–*B*** 対応の関係も丁寧に説明されている。

3) 世界大百科事典(平凡社)「単位」

専門書ではないものの, 電磁気単位系の話が驚くほど正確にかつ丁寧に解説されている圧巻もの。上記文献1と同じ表(第2表)も掲載され(同一執筆者か？)，それぞれの単位系での基本量や定義が正確に記述されている。また，単位系間の単位の数値的な比をまとめた表(第4表)は，他に掲載例を見ない貴重なもので，本プリントで行ったような単位系間の式変換を自分で行う場合には，有効なものである。逆にこの第4表を作成することは極めてよい演習問題となる。

4) ゾンマーフェルト著「理論物理学講座III 電磁気学」伊藤大介訳(講談社) pp.433～441 (付録：初学者のための準備)

測定値と単位の"反傾的"関係の一般論を解説し，電磁気系の理論式を各単位系に合わせて方法が紹介されている。説明の中での式変形の方向性を決める際の「単純性の要請」はやや必然性を欠くような印象を受ける(Gauss単位系は，もともと誘電率と透磁率を無次元としたので，そのしわ寄せとして式変換の際出てくる光速を物理量として残なければならない, あるいは逆に, Gauss単位系から変換するときには, 光速は数値化されて残す変数以外の定数部分に含めてしまうということがはっきり説明されていないことによる) 。

MKSA 単位系(通常は有理系)　***E*–*H*** 対応

物理量	記号	名称	単位			
電荷	q	ｸｰﾛﾝ(C)	C			
誘電率	ε	―	$N^{-1}\ C^{2}\ m^{-2}$	$kg^{-1}\ m^{-3}\ C^{2}\ s^{2}$		
電場	E	―	$N\ C^{-1}$	$kg\ m\ C^{-1}\ s^{-2}$	$V\ m^{-1}$	
電束密度	D	―	$C\ m^{-2}$			
双極子ﾓｰﾒﾝﾄ	μ	※	C m			
磁荷(磁気量)	q_m	ｳｪｰﾊﾞｰ(Wb)	$N\ A^{-1}\ m$	$kg\ m^{2}\ C^{-1}\ s^{-1}$	V s	H A
磁束	Φ	ｳｪｰﾊﾞｰ(Wb)	$N\ A^{-1}\ m$	$kg\ m^{2}\ C^{-1}\ s^{-1}$	V s	H A
透磁率	μ	―	$N\ A^{-2}$	$kg\ m\ C^{-2}$	$Wb^{2}\ N^{-1}\ m^{-2}$	$H\ m^{-1}$
磁場	H	―	$A\ m^{-1}$	$N\ Wb^{-1}$		
磁束密度	B	ﾃｽﾗ(T)	$N\ A^{-1}\ m^{-1}$	$Wb\ m^{-2}$		
磁気ﾓｰﾒﾝﾄ	μ_m	―	$N\ A^{-1}\ m^{2}$	Wb m		

・真空誘電率(ε_0)：$10^7/(4\pi c'_0{}^2) = 10^{11}/(4\pi c_0{}^2)\ N^{-1}\ C^2\ m^{-2}$
　c'_0は $m\ s^{-1}$単位での真空中光速の数値(無次元)，c_0は $cm\ s^{-1}$単位での真空中光速の数値(無次元)
・真空透磁率(μ_0)：$4\pi\times10^{-7}\ N\ A^{-2}$
・$c'_0 = (\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2}$
・ｲﾝﾀﾞｸﾀﾝｽ単位　H(ﾍﾝﾘｰ) = $N\ m\ A^{-2} = kg\ m^2\ C^{-2} = V\ A^{-1}\ s = Wb\ A^{-1}$
・***E*–*H*** 対応と ***E*–*B*** 対応の最大の違いは，***E*–*H*** 対応が $B = \mu_0 H + P_m$ とし，***E*–*B*** 対応が $H = B/\mu_0 - M$ とすること(P_m，M はそれぞれ ***E*–*H*** 対応と ***E*–*B*** 対応における磁化)。
・***E*–*B*** 対応での磁荷は$\xi = q_m/\mu_0$であり，単位としては A m である。***E*–*B*** 対応では磁束密度を磁場とする。
・磁気モーメントも ***E*–*B*** 対応的に $m = \mu_m/\mu_0$で定義されることがあるが，この場合の単位は $A\ m^2$。

- -

・電荷：C(ｸｰﾛﾝ) = $(c_0/10)$ esu = $(c_0/10)$ Fr(ﾌﾗﾝｸﾘﾝ) = $10c'_0$ Fr
・磁束：Wb(ｳｪｰﾊﾞｰ) = 10^8 Mx(ﾏｸｽｳｪﾙ)
・磁場：$A\ m^{-1} = (4\pi/10^3)$ Oe(ｴﾙｽﾃｯﾄﾞ)
・磁束密度：T(ﾃｽﾗ) = 10^4 G(ｶﾞｳｽ)

※　双極子ﾓｰﾒﾝﾄに対して D(ﾃﾞﾊﾞｲ)という単位が使われることがあるが，D = C m ではない。D(ﾃﾞﾊﾞｲ)はもともと CGS esu の双極子モーメントの単位(esu cm)に対して $D = 10^{-18}$ esu cm として定義されたものであり，SI 単位系には含まれない。$D = 10^{-18}\ esu\ cm = (10^{-18})(10/c_0)(10^{-2})C\ m = (10^{-19}/c_0)\ C\ m = 3.335640...\times10^{-30}\ C\ m$ であり，D = C m ではないことに注意(つまり，D は C m の呼び名ではない)。

CGS esu(CGS 静電単位系)(通常は非有理系)

物理量	記号	名称	単位		
電荷	q	ﾌﾗﾝｸﾘﾝ(Fr)	esu	$\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}$	$\mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{3/2}\ \mathrm{s}^{-1}$
誘電率	ε	—	-	-	-
電場	E	—	$\mathrm{dyn\ esu}^{-1}$	$\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1}$	$\mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1/2}\ \mathrm{s}^{-1}$
電束密度	D	—	$\mathrm{dyn\ esu}^{-1}$	$\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1}$	$\mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1/2}\ \mathrm{s}^{-1}$
双極子ﾓｰﾒﾝﾄ	μ	—	esu cm	$\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{2}$	$\mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{5/2}\ \mathrm{s}^{-1}$
磁荷(磁気量)	q_{m}	—		$\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{s}$	$\mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{1/2}$
磁束	Φ	—		$\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{s}$	$\mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{1/2}$
透磁率	μ	—	$\mathrm{cm}^{-2}\ \mathrm{s}^{2}$		
磁場	H	—		$\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{s}^{-1}$	$\mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{1/2}\ \mathrm{s}^{-2}$
磁束密度	B	—		$\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-2}\ \mathrm{s}$	$\mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-3/2}$
磁気ﾓｰﾒﾝﾄ	μ_{m}	—		$\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm\ s}$	$\mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{3/2}$

・原則として単位名称なし。Fr(ﾌﾗﾝｸﾘﾝ)はCGS esuからMKSAへの移行の過渡的措置として，国際記号単位述語委員会(SUN委員会)が1961年にcm, g, s, Frを基本単位とする「一般化CGS静電単位系」を設定した際に採択された名称。

・真空誘電率(ε_0)：1 (無次元)

・真空透磁率(μ_0)：$1/c_0^2$ このc_0は真空中光速2.99792458×10^{10} cm s^{-1}(次元あり)

CGS emu(CGS電磁単位系)(通常は非有理系)

物理量	記号	名称	単位		
電荷	q	—		dyn$^{1/2}$ s	g$^{1/2}$ cm$^{1/2}$
誘電率	ε	—	cm^{-2} s^{2}		
電場	E	—		dyn$^{1/2}$ s^{-1}	g$^{1/2}$ cm$^{1/2}$ s^{-2}
電束密度	D	—		dyn$^{1/2}$ cm^{-2} s	g$^{1/2}$ cm$^{-3/2}$
双極子ﾓｰﾒﾝﾄ	μ	—		dyn$^{1/2}$ cm s	g$^{1/2}$ cm$^{3/2}$
磁荷(磁気量)	q_{m}	—	emu	dyn$^{1/2}$ cm	g$^{1/2}$ cm$^{3/2}$ s^{-1}
磁束	Φ	ﾏｯｸｽｳｪﾙ(Mx)	emu	dyn$^{1/2}$ cm	g$^{1/2}$ cm$^{3/2}$ s^{-1}
透磁率	μ	—	-	-	-
磁場	H	ｴﾙｽﾃｯﾄﾞ(Oe)	dyn emu^{-1}	dyn$^{1/2}$ cm^{-1}	g$^{1/2}$ cm$^{-1/2}$ s^{-1}
磁束密度	B	ｶﾞｳｽ(G)	dyn emu^{-1}	dyn$^{1/2}$ cm^{-1}	g$^{1/2}$ cm$^{-1/2}$ s^{-1}
磁気ﾓｰﾒﾝﾄ	μ_{m}	—	emu cm	dyn$^{1/2}$ cm^{2}	g$^{1/2}$ cm$^{5/2}$ s^{-1}

・真空誘電率(ε_0)：$1/c_0^{2}$　このc_0は真空中光速2.99792458×10^{10} cm s^{-1}(次元あり)

・真空透磁率(μ_0)：1 (無次元)

・G(ｶﾞｳｽ) = Mx cm^{-2}

・原則として単位名称なし。電流にBi(ﾋﾞｵ)という名称の単位があるが，これは，国際記号単位述語委員会(SUN委員会)が1961年にcm, g, s, Biを基本単位とする「一般化CGS電磁単位系」を設定した際に採択された名称。Bi(ﾋﾞｵ) = 10 A

Gauss単位系(通常は非有理系)

物理量	記号	名称	単位		
電荷	q	ﾌﾗﾝｸﾘﾝ(Fr)	esu	dyn$^{1/2}$ cm	g$^{1/2}$ cm$^{3/2}$ s^{-1}
誘電率	ε	―	-	-	-
電場	E	―	dyn esu^{-1}	dyn$^{1/2}$ cm^{-1}	g$^{1/2}$ cm$^{-1/2}$ s^{-1}
電束密度	D	―	dyn esu^{-1}	dyn$^{1/2}$ cm^{-1}	g$^{1/2}$ cm$^{-1/2}$ s^{-1}
双極子ﾓｰﾒﾝﾄ	μ	―	esu cm	dyn$^{1/2}$ cm^{2}	g$^{1/2}$ cm$^{5/2}$ s^{-1}
磁荷(磁気量)	q_{m}	―	emu	dyn$^{1/2}$ cm	g$^{1/2}$ cm$^{3/2}$ s^{-1}
磁束	Φ	ﾏｸｽｳｪﾙ(Mx)	emu	dyn$^{1/2}$ cm	g$^{1/2}$ cm$^{3/2}$ s^{-1}
透磁率	μ	―	-	-	-
磁場	H	ｴﾙｽﾃｯﾄﾞ(Oe)	dyn emu^{-1}	dyn$^{1/2}$ cm^{-1}	g$^{1/2}$ cm$^{-1/2}$ s^{-1}
磁束密度	B	ｶﾞｳｽ(G)	dyn emu^{-1}	dyn$^{1/2}$ cm^{-1}	g$^{1/2}$ cm$^{-1/2}$ s^{-1}
磁気ﾓｰﾒﾝﾄ	μ_{m}	―	emu cm	dyn$^{1/2}$ cm^{2}	g$^{1/2}$ cm$^{5/2}$ s^{-1}

・真空誘電率(ε_0)：1 (無次元)

・真空透磁率(μ_0)：1 (無次元)

・誘電率にも透磁率にも次元を持たせないかわりに，電気的量と磁気的量を結びつける式に光速c_0[= 2.99792458×10^{10} cm s^{-1}(次元あり)]が入ってくる。例えば，ビオ・サバールの法則の式の分母に書かれる比例定数がc_0 = 2.99792458×10^{10} cm s^{-1}(次元あり)となる。

電磁気学における単位系

1983年10月 3日 初版
1991年 8月22日 第2版第1刷
1993年 6月20日 第3版第1刷
1999年 2月 7日 第4版第2刷
2005年 7月31日 第5版第6刷

著者 山﨑勝義
発行 漁火書店

検印 山﨑

印刷 ブルーコピー
製本 ホッチキス

分子科学アーカイブス

AC0003

電磁気学における単位系

山崎勝義　著

公開日　2007 年　6 月　29 日　　第 1 版

著者紹介

山崎勝義（やまさきかつよし）
所属：広島大学大学院理学研究科化学専攻
専門分野：反応物理化学

電磁気学における単位系

§0 はじめに

電磁気学の学習の中で意外に高い障壁が単位系の理解である。単位は，物理量の大きさを共通の“ 言葉 ”で伝達し合うために人間が考案したものであるが，電磁気現象の記述において多くの単位(系)が存在するために混乱が生じやすく，現象の定式化よりも単位系という人為的な約束ごとの理解に時間とエネルギーを費やさざるをえない事態に陥ることがある[1]。地球上には多くの言語が存在するが，英語を“ 共通語 ”と認識することで混乱が避けられている。電磁気学にも MKSA 単位系という“ 標準語 ”が存在するが[2]，分野によってはいまだに“ 昔の標準語 ”である別の単位系が使われることがある(新刊書であっても非 SI の単位系が使われている場合もある)[3]。名著や古典と呼ばれるような由緒ある成書をひもといて基本事項を学習しようとしても，古い書物の大半が MKSA 単位系で書かれていないので，単位系の相違が原因で難解さが増すことがある[4]。とはいえ，単位系を正しく理解しなければ，理論式に数値を代入して計算をすることもできないし，ある単位系で書かれた式を別の単位系の式に変換することもできない。本書は，電磁気学に関する単位系の混乱を解消し，異なる単位系のあいだを自由に行き来するための“ ワザ ”の習得をめざして書かれた monograph である。

§1 単位系の種類

電磁気量を記述する単位系を考える基本は，電気系と磁気系の物理量およびそれらの相互作用(力)を表す法則式である。電荷(電気量)間にはたらく力を表すクーロン(Coulomb)の法則

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{\alpha}\frac{q_1 q_2}{r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{1}$$

磁荷(磁気量)間にはたらく力を表すクーロンの法則[5]

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{\beta}\frac{q_{\mathrm{m}1} q_{\mathrm{m}2}}{r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{2}$$

電流と磁場の相互作用を表すアンペール(Ampère)の力

---

1 筆者は，大学教養時代にこの状況に陥った。同じ現象を表す式の形が成書ごとに異なっていると，論理展開よりも単位系を理解することの方が先決問題になってしまうことがある。

2 英語が最も合理的で使いやすい言語とは限らないのと同様に，MKSA 単位系が電磁気学の単位系の中で最も合理的で使いやすいとはいえない。

3 理論物理学系の分野(量子力学など)では，現在でも Gauss 単位系が用いられていることが多い。

4 時代が遡るほど，SI 単位系で記述されている確率は低くなる。

5 あとで述べるように，磁気の本質は磁荷ではなく電流であり，単極の磁荷は仮想的なものでしかないが，単位系を考える上では，磁荷を想定しても問題は生じない。

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{\gamma} I \,\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B} \tag{3}$$

が電磁気学において重要な力の式である。ここで，$\boldsymbol{F}$ は力，r は電荷間や磁荷間の距離，$\boldsymbol{e}_r$ は r に沿う単位ベクトル(= $\boldsymbol{r}/r$)，q は電荷，q_{m} は磁荷，I は電流，$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ は電流に沿う素片のベクトル($I\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ が電流素片ベクトル)，$\boldsymbol{B}$ は磁束密度であり，α, β, γ(の逆数)は比例定数である。ここで，電気系には誘電率ε，磁気系には透磁率μと呼ばれる物理量を設定し[1]，α, βをそれぞれ

$$\alpha = k\varepsilon \tag{4}$$

$$\beta = k\mu \tag{5}$$

と書くと，マクスウェル(Maxwell)の方程式は次の 4 式で表されることになる[2]。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \frac{4\pi}{k}\rho \tag{6}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{\gamma}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{7}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{8}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{\gamma k}\boldsymbol{j} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{9}$$

ここで，$\boldsymbol{D}$ は電束密度，ρは電荷密度，$\boldsymbol{H}$ は磁場の強さ，$\boldsymbol{j}$ は電流密度[3]である。なお，$\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{E}$ のあいだには

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \tag{10}$$

$\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{H}$ のあいだには

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{11}$$

の関係がある。いま，真空を想定すると(電荷や電流が存在しない状態：$\rho = 0$, $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{0}$)，$\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$ とおけるから(ε_0, μ_0 はそれぞれ真空誘電率と真空透磁率)，式(6)〜(9)に対応するマクスウェルの方程式は

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{12}$$

[1] 現段階ではその単位(次元)も大きさも未定である。誘電率も透磁率も物質に依存する。
[2] マクスウェルの方程式の導出は電磁気学のテキストを参照のこと。(マクスウェルの方程式が解説されていない電磁気学のテキストを見つけるのは難しいくらいである。)
[3] 単位時間あたり単位面積を通過する電気量(電荷量)である。言い換えると，電荷のフラックス(flux)である。

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{\gamma}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{13}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{14}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\gamma}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{15}$$

の形となる。

式(13)の両辺の rot(≡ ∇ ×)をとると[1],

$$(\text{左辺}) \to \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) \tag{16}$$

$$(\text{右辺}) \to \nabla \times \left(-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right) = -\frac{1}{\gamma}\left(\nabla \times \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right) = -\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{B}) \tag{17}$$

となる。式(16)は，ベクトルの代数公式を使って,

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E} \tag{18}$$

と変形できるが，式(12)により右辺第 1 項が消えて,

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = -\nabla^2 \boldsymbol{E} \tag{19}$$

の形になる。一方，式(17)の$\nabla \times \boldsymbol{B}$ に式(15)を代入すると,

$$-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{B}) = -\frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\gamma^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) = -\frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\gamma^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \tag{20}$$

となり，式(19)と式(20)が等しいことから,

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\gamma^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \tag{21}$$

が成立する。これは波動を表す方程式であり，速さ

$$v = \frac{\gamma}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \tag{22}$$

で進行する波動を表している(たとえば, 波長λ，速さvで伝搬する波の式$e^{2\pi i(x - vt)/\lambda}$が式(21)を満足することは容易に確認することができる)。つまり，電場は速さ v で伝搬する波として

[1] rot は「回転」に由来しており curl とも記す。$\nabla \times \boldsymbol{A} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \mathrm{curl}\,\boldsymbol{A}$ である。

存在しうることになる。

一方，式(15)の両辺の rot をとると，左辺からは,

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) - \nabla^2\boldsymbol{B} = -\nabla^2\boldsymbol{B} \tag{23}$$

が得られ(式(14)を適用)，式(15)の右辺からは,

$$\nabla\times\left(\frac{\varepsilon_0\mu_0}{\gamma}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right) = \frac{\varepsilon_0\mu_0}{\gamma}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{E}) = -\frac{\varepsilon_0\mu_0}{\gamma^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2} \tag{24}$$

が得られるから(式(13)を適用),

$$\nabla^2\boldsymbol{B} = \frac{\varepsilon_0\mu_0}{\gamma^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2} \tag{25}$$

が成立する。この式は式(21)とまったく同型であるから，磁場も電場と同じ速さ$\gamma/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$で伝搬する波として存在しうることがわかる。速さ v は真空中の光速 2.99792458 × 10^8 m s^{-1} に対応しており[1]，以後，これを c_0 と記すことにする[2]。従って,

$$\boxed{c_0 = \frac{\gamma}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}} \tag{26}$$

が常に成立する(式(13)，(15)あるいは式(26)からわかるように，定数γは電気的な現象と磁気的な現象をつなぐ役割を果たしており，その意味で「連結因子」と呼ばれることがある。式(26)の関係は単位系にかかわらず常に成立しなければならないから，3 つの定数α，β，γのうち独立に与えうるもの(独立量)は 2 つだけである。従って，定数α, β, γのとり方(言い換えると，ε_0, μ_0, γ, k の与え方)にもとづいて，いくつかの単位系が構成されることになる。

[1] ε_0, μ_0, γのとり方 → 独立量の相違
[2] k のとり方 → 定数値の相違
[3] 単位のとり方 → 基本単位の相違

[1]は非常に重要であり，電気量にかかわるもの(たとえばε_0)を定義してからその他の定数を決める(静電単位系; **E**lectro**s**tatic system of **u**nits＝esu 単位系)，磁気量にかかわるもの(たとえばμ_0)を定義してから他の定数を決める(電磁単位系; **E**lectro**m**agnetic system of **u**nits＝emu 単位系)，ε_0 とμ_0 両方に定義を与える(Gauss 系)などの単位系があり，それぞ

1 この数値は測定値ではなく，定義された値(exact)である。
2 従って，本書では，c_0 = 2.99792458 × 10^8 m s^{-1} = 2.99792458 × 10^{10} cm s^{-1} である。

れの単位系ごとに物理量の単位(次元)だけでなく理論式の(見かけの)形も変わることになる。

[2]に関して，$k = 4\pi$とする場合を有理系といい，$k = 1$とする場合を非有理系という[1]。これらは，理論式の見かけの形にかかわる問題であり本質的な点ではないが，いくつかの成書に書かれた式同士を比較したり，式に数値を代入して計算したりするときには，どちらの系で書かれたものかを把握しておかなければ正しい値を得ることができない。有理系では，クーロンの法則やビオ・サバール(Biot-Savart)の法則に 4πが現れて複雑に見えるが，逆に，マクスウェル方程式に 4πが現れなくなるため見かけがきれいになる。非有理系はこの逆で，クーロンの法則は見かけがすっきりするが，マクスウェル方程式の随所に 4πが現れる。

[3]は，物理量の大きさを表す単位を cm, g, s で統一するか，m, kg, s, A(または C)で統一するかという区別である。前者を 3 元系，後者を 4 元系と呼ぶ。

以下に，主な単位系の定義と特徴を記す。

1) CGS esu(CGS 静電単位系)
- 基本単位は cm, g, s である(3 元系)。
- $k = 1$(非有理系)とする。
- 真空誘電率ε_0と連結因子γを独立量にとり，$\varepsilon_0 = 1$および$\gamma = 1$(いずれも無次元)と定義する。従って，真空透磁率μ_0は式(26)より，

$$\mu_0 = \frac{1}{c_0^2} = 1.11265\ldots \times 10^{-21}\ \mathrm{cm}^{-2}\ \mathrm{s}^2 \tag{27}$$

となる。

2) CGS emu(CGS 電磁単位系)
- 基本単位は cm, g, s である(3 元系)。
- $k = 1$(非有理系)とする。
- 真空透磁率μ_0と連結因子γを独立量にとり，$\mu_0 = 1$および$\gamma = 1$(いずれも無次元)と定義する。従って，真空誘電率ε_0は式(26)より，

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{c_0^2} = 1.11265\ldots \times 10^{-21}\ \mathrm{cm}^{-2}\ \mathrm{s}^2 \tag{28}$$

となる。

3) Gauss 単位系
- 基本単位は cm, g, s である(3 元系)。
- $k = 1$(非有理系)とする。
- 真空誘電率ε_0と真空透磁率μ_0を独立量とし，両方を 1(無次元)と定義する。従って，連結因子が$\gamma = c_0 = 2.99792458 \times 10^{10}\ \mathrm{cm\ s}^{-1}$となる。

---
[1] 4πは全球の立体角に由来している。

4) MKSA 単位系[1]

・基本単位は m, kg, s，A(または C)である(4 元系)。

・k = 4π(有理系)とする。

・真空透磁率μ_0 と連結因子γを独立量にとる。真空透磁率は

$$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{N\ A^{-2}} = 4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{kg\ m\ C^{-2}} \tag{29}$$

と定義(exact 値を設定)し[2]，連結因子をγ = 1(無次元)とするから，式(26)より真空誘電率は

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c_0^2} = 8.854187817\ldots\times10^{-12}\ \mathrm{N^{-1}\ C^2\ m^{-2}} \tag{30}$$

となる。μ_0 も c_0 も定義された値(exact)であるからε_0 も定義値となるが[3]，μ_0 が数値で与えられ，ε_0 の中に光速が入っていることから電磁単位系列の単位系である。1901 年に G. Giorgi が提案し，1954 年の第 10 回国際度量衡総会の決議により国際単位系(SI)として採択された。

以下では，各単位系を，CGS esu 系，CGS emu 系，Gauss 系，MKSA 系と呼ぶ。これらの代表的 4 単位系の設定をまとめたものが表 1 である。

表 1．代表的な 4 単位系の設定

単位系	基本単位	独立量	k	ε_0	μ_0	γ
CGS esu	cm, g, s	ε_0, γ	1	1	$1/c_0^2$	1
CGS emu	cm, g, s	μ_0, γ	1	$1/c_0^2$	1	1
Gauss	cm, g, s	ε_0, μ_0	1	1	1	c_0
MKSA	m, kg, s, A	μ_0, γ	4π	$1/(\mu_0 c_0^2)$	$4\pi\times10^{-7}$	1

(注) c_0 は真空中の光速であり，その大きさは各単位系の基本単位を用いて表す。従って，MKSA 系では，$c_0 = 2.99792458\times10^{8}\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ であり，それ以外の単位系については $c_0 = 2.99792458\times10^{10}\ \mathrm{cm\ s^{-1}}$ である。

[1] MKSQ 単位系ともいう。

[2] 定義される数値であるから単に 1 でもよいはずであるが，とても思い付きようがない値に設定されている(電磁気学の単位系に対する戸惑いはこの不思議な数値から始まるといっても過言ではない)。この値は，昔から電気工学分野で使われていた V(ボルト)，A(アンペア)，Ω(オーム)，W(ワット)などの単位の大きさを変えないように単位系を構築したことのしわよせであり，基本量としての透磁率や誘電率を(定義値らしくない)定数として与えざるをえなかったという経緯である。(値を自由に決めていいといわれて $4\pi\times10^{-7}$ にとる人は，まず，いないであろう。)

[3] ε_0 もμ_0 も定義値であるからどちらを先に与えても結果は同じであるが，通常は，μ_0 を独立量する。

5) その他の単位系

〇ローレンツ–ヘビサイド単位系

Gauss 系同様に，電気的な量には CGS esu を，磁気的な量には CGS emu を使うが，有理系の単位系である。ヘビサイド(O. Heaviside)が 1882–83 年に提案しローレンツ(H. A. Lorentz)が再編成したもので，有理系の元祖といえる単位系である。一時期広く使われたが MKSA 系へと移行した。

〇一般化 CGS 静電単位系(一般化 CGS esu)

CGS esu を 4 元系にしたもの。cm, g, sec, Fr を基本単位とする。CGS esu 系から MKSA 系へ移行する過渡的措置として，国際記号単位述語委員会(SUN 委員会)が採択したもの。基本単位である CGS esu 系の電荷に Fr(フランクリン)という名称が与えられた。

〇一般化 CGS 電磁単位系(一般化 CGS emu)

CGS emu 系を 4 元系にしたもの。cm，g，sec，Bi を基本単位とする。基本単位である CGS emu 系の電流に Bi(ビオ)という名称が与えられた。

〇MKSP 単位系

鈴木範人，小塩高文「応用光学 II」(朝倉書店，1982)の中で紹介されている単位系。MKSP の P は Physical を意味する。有理 3 元系(MKS)であり，$\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$, $\gamma = c_0$ とする。従ってローレンツ-ヘビサイド単位系の MKS 版ということもできる。電気系と磁気系に対する Gauss 系の対称性のよさを活かしつつ，非有理系という Gauss 系の欠点[1]を解消するために考案されたが広く普及はしていない。

§2 電場と磁場の対応($\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応と $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応)

電磁気学の単位に関する重要な点として，電気的な量と磁気的な量の対応の問題がある。電気量である電荷に対応するものとして，磁気量として“磁荷”を考え，磁荷に対するクーロンの法則を基本とする立場が $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応と呼ばれるものである。つまり，$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応は磁石が作る磁場を出発点とする立場である。しかし, 電荷と違って, これまでに単独の磁荷のみ(つまり単独の N 極あるいは S 極のみ)が取り出されたことはなく，磁荷は存在しないとされている。しかし，理論的な取り扱いにおいて，$q \leftrightarrow q_{\mathrm{m}}$, $\varepsilon_0 \leftrightarrow \mu_0$, $\boldsymbol{E} \leftrightarrow \boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D} \leftrightarrow \boldsymbol{B}$ という対応により，電気現象と磁気現象がまったく同じ形式で扱えるというメリットがあるためこの立場($\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応)が存在する。$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応での磁気に関するクーロンの法則は

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{q_{\mathrm{m}1}q_{\mathrm{m}2}}{r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{31}$$

---

[1] 鈴木，小塩両氏が彼らの著書で述べているように，非有理系では 1 次元問題の式中に係数 4πが現れ，球対称問題では逆に 4πが消えるという(イメージとは逆の)違和感が生じる。これは，非有理系では単位電荷から電気力線が 4π本出ているとするのに対して，有理系では単位電荷から電気力線が 1 本出ているとする前提(設定)の違いが原因である。また，両氏は，「MKSA 系が純理的にも他に隔絶してすぐれているかに思い込まれると，それは誤りである。」「MKSA 系では，非対称の電磁単位系統であるため，電磁波らしくないところに c が現れ(例：ε_0)，かえってマックスウェルの方程式のように電磁波と直接関連するところにそれが現れず，積εμの中に埋没してくる。これも MKSA 系の欠点の一つである」と述べている。(筆者もその通りであると思う。)

で表され，電荷のクーロンの法則との比較から，$q_{\mathrm{m}1}$ と $q_{\mathrm{m}2}$ という磁荷間に力 $\boldsymbol{F}$ がはたらくことを意味している。電荷のクーロンの法則

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{32}$$

から，電荷 q_2 が作る電場 $\boldsymbol{E}$ が

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{33}$$

で与えられ，力が $\boldsymbol{F} = q_1\boldsymbol{E}$ で表されるのと同様に，磁荷 $q_{\mathrm{m}2}$ が作る磁場 $\boldsymbol{H}$ を,

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{q_{\mathrm{m}2}}{r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{34}$$

と書くことができ，磁荷間の力を

$$\boldsymbol{F} = q_{\mathrm{m}1}\boldsymbol{H} \tag{35}$$

と表すことができる。

一方，$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応の立場では，磁石の基本は磁荷ではなく(円)電流であるとして磁荷というものを考えない。磁気的な力の基本法則はクーロンの法則ではなくアンペールの力(式(3))

$$\boldsymbol{F} = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B} \tag{36}$$

であり，ビオ・サバールの法則が表す磁場(正確には磁束密度)と電流の相互作用で力が生じる[1]。つまり，$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応は，電流が作る磁場を出発点とする立場である[2]。磁束密度 $\boldsymbol{B}$ は μ_0 によって $\boldsymbol{H}$ と結ばれ，真空中では

$$\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H} \tag{37}$$

の関係がある。式(36)を $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応での $\boldsymbol{F} = q_{\mathrm{m}1}\boldsymbol{H}$(式(35))に対応する式と見なすことができるから，$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応では，電流素片 $I\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ を(一種の)磁荷，$\boldsymbol{B}$ を磁場と考えていることになる[3]。しかし，式(36), (37)より，$\boldsymbol{F} = \mu_0 I\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{H}$ の形にして磁場をあらわに示し，この $\boldsymbol{H}$ が作用して力 $\boldsymbol{F}$ がはたらく対象として磁荷に相当するものを考えてしまうと, 磁場を($\boldsymbol{B}$ ではなく)$\boldsymbol{H}$ とする $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応と同じ立場になってしまうので，あくまで $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応の立場で磁気のクーロンの法則を表す必要がある。そこで，$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応で書かれたクーロンの法則(たとえば式(35))

---

[1] この式は有名な「フレミングの左手の法則」を表したものであり，親指 ＝ $\boldsymbol{F}$，人差し指 ＝ $\boldsymbol{B}$，中指 ＝ $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ という対応になるが，外積を習得していれば(＝大学生は)「フレミング」を使う必要はない。$I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ と $\boldsymbol{B}$ のなす角が鈍角になると(指が痛いので)外積で考える方がよい。旧国鉄吹田教習所の電気工学の講義では「親指 ＝ $\boldsymbol{F}$ ＝**う**ごき，人差し指 ＝ $\boldsymbol{B}$ ＝ **じ**ば，中指 ＝ $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ ＝ **でん**りゅう」を略して(フレミングの右手法則も左手法則も)「うじでん ＝ 宇治電 (現 山陽鉄道)」と呼んでいたというエピソードがある。

[2] もちろん，磁石が作る磁場も電流が作る磁場も本質は同じである。

[3] $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応では $\boldsymbol{B}$ を単に磁場と呼ぶことが多いが，正しくは，$\boldsymbol{H}$ を「磁場の強さ」，$\boldsymbol{B}$ を「磁束密度」と呼ぶべきである。

$$\boldsymbol{F} = q_{\mathrm{m}}\boldsymbol{H} \tag{38}$$

の形に合わせて，$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応でのクーロンの法則の式を，

$$\boldsymbol{F} = \xi\boldsymbol{B} \tag{39}$$

の形に書き，“ 新しい ” 磁荷ξを形式的に導入すると，真空中では $\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H}$ であるから，$\boldsymbol{F} = \mu_0\xi\boldsymbol{H}$ となり，$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応での磁荷ξは $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応の磁荷 q_{m} と(μ_0 の分だけ)次元も値も異なることになる。つまり，

$$\xi = \frac{q_{\mathrm{m}}}{\mu_0} \tag{40}$$

であり，ξの単位は A m，q_{m} の単位は N A^{-1} m (= Wb；ウェーバ[1])である。同じ磁荷であるにもかかわらず単位も大きさも異なるのは, そもそも磁荷というものを考えない $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応の立場において，あえて磁荷というものを考えた結果である。言い換えると，磁荷という物理量に違いを設けたことによって，$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応でも $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応でも $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, μ_0 が同じ次元と値をもつことができているのである[2]。

　仮想的な磁荷とは別に, 測定される物理量の中にも $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応と $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応とで定義が変わるものがあることに注意しておく必要がある。その典型例は磁化である。$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応での磁化 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{H}}$ (添字の H は $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応を意味する)は次式で与えられる。

$$\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H} = \mu_0\boldsymbol{H} + \frac{4\pi}{k}\boldsymbol{M}_{\mathrm{H}} \tag{41}$$

これは，電気(静電)系の関係式

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \frac{4\pi}{k}\boldsymbol{P} \tag{42}$$

($\boldsymbol{D}$ は電束密度，$\boldsymbol{E}$ は電場，$\boldsymbol{P}$ は分極)における分極 $\boldsymbol{P}$ と磁気系の磁化 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{H}}$ が対応していることを表している。

　一方，$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応の場合，$\boldsymbol{H}$ を次式により導入する。

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B} - \frac{4\pi}{k}\boldsymbol{M}_{\mathrm{B}} \tag{43}$$

この式中の $\boldsymbol{M}_{\mathrm{B}}$ が $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応の磁化である。つまり，

$$\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H} + \frac{4\pi\mu_0}{k}\boldsymbol{M}_{\mathrm{B}} \tag{44}$$

であり，式(41)と式(44)の比較から，

---

[1] 名称はドイツの物理学者 W. H. Weber(ウェーバー)に由来するが，単位名としては「ウェーバ」と書く。
[2] 電場や磁場が $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応と $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応とで異なる値をもつことになると大混乱を招くであろう。

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{B}} = \frac{\boldsymbol{M}_{\mathrm{H}}}{\mu_0} \tag{45}$$

という関係が得られ，同じ磁化と呼ばれる物理量でも，***E*–*H*** 対応と ***E*–*B*** 対応とでは同一ではなくなり，式(40)の磁荷と同様にμ_0 倍の違いが生じることになる(μ_0 は $4\pi \times 10^{-7}$ N A^{-2} という数値であるから差は非常に大きい)。このように，***E*–*H*** 対応と ***E*–*B*** 対応のいずれの対応で定義されている式であるかを認識した上で式や数値を扱わなければ，桁違いの誤りを引き起こす危険性がある。

§3 単位の換算

以下では，いろいろな単位系のあいだでの単位の換算を行う。まず，最も基本的な MKSA 系の C(クーロン)と CGS esu 系の電荷単位 esu との変換を行う[1]。この場合，基本になるのはクーロンの法則であり，MKSA 系では,

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{46}$$

CGS esu 系では,

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{47}$$

と表される[2]。両者がまったく同じ現象を表している場合でも，基本単位の違いを反映して，両左辺の F の値は異なる尺度(N(ニュートン)と dyn(ダイン)は 10^5 倍異なる)で測られる。単純な例を示すと，ある式の中で長さを表現する変数 x がメートル(m)単位で測られるとき，その式の x をセンチメートル(cm)単位で測られる変数x' に置き換えるには，x m = x' cm に対して m = 100 cm を適用して得られる

$$x = x'\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{m}} = \frac{x'}{100} \tag{48}$$

という関係をもとの式の x に代入すればよい。以下に示す単位の換算はすべてこの(単純な)原理を利用する。式(48)の x も x' も物理量ではなく数値を表している。このような数値間の関係式を「数値方程式」と呼ぶ。数値方程式$100x = x'$ は，単位間の関係 m = 100 cm と逆の関係になっており[3]，(当然ながら)物理量を表現する単位のサイズが大きい文字ほど数値は小さくなる。

C と esu の換算を行うために，クーロンの法則の数値方程式を変形する。MKSA 系で書かれた式(つまり N で測られた力)と CGS esu 系で書かれた式(dyn で測られた力)を区別するために，後者の文字にプライム記号(')を付けて,

---

[1] 電荷の単位としての esu をフランクリン(Fr)と呼ぶ場合がある。
[2] 単位の換算を考える場合はベクトル量で考える必要がないので，スカラーで表した式を用いることにする。
[3] これを単位と測定値の「反傾的関係」と呼ぶ。

$$F' = \frac{q'_1 q'_2}{r'^2} \tag{49}$$

と書くことにする。MKSA 系の式(46)を数値方程式とみなし，既知の単位間の換算関係を利用して変形したのち CGS esu 系の式を“抜き取る”ことで，未知の C と esu の単位としての大きさの比を求めるという手順で進める。まず，式(46)に現れた文字を，

$$F\,\mathrm{N} = F'\,\mathrm{dyn} \longrightarrow F = F'\frac{\mathrm{dyn}}{\mathrm{N}} \tag{50}$$

$$q\,\mathrm{C} = q'\,\mathrm{esu} \longrightarrow q = q'\frac{\mathrm{esu}}{\mathrm{C}} \tag{51}$$

$$r\,\mathrm{m} = r'\,\mathrm{cm} \longrightarrow r = r'\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{m}} \tag{52}$$

の関係を用いて置き換えると，

$$F'\left(\frac{\mathrm{dyn}}{\mathrm{N}}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'_1 q'_2\left(\frac{\mathrm{esu}}{\mathrm{C}}\right)^2}{r'^2\left(\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{m}}\right)^2} \tag{53}$$

が得られる。式(53)は(物理量の方程式ではなく)数値方程式であるから，変換後，「 ' 」が付いた文字の関係式が得られたとき，F' や q'_1 などの文字以外はすべて数値になっていなければならない。従って，式(53)の ε_0 を(次元がない)数値として置き換える必要がある。式(46)の中の ε_0 は式(30)で示したように $8.854187817\ldots \times 10^{-12}$ という大きさであるが，この数値表記をそのまま式(53)に代入すると式が見にくくなるので，ε_0 の大きさを

$$\varepsilon_0 \to \frac{10^{11}}{4\pi\zeta^2} \tag{54}$$

と表す(当然ながら，式(54)の値は $8.854187817\ldots \times 10^{-12}$ である)。ここで，ζは <u>$\mathrm{cm\ s^{-1}}$ 単位で表した真空中光速の数値</u>($2.99792458 \times 10^{10}$)である[1]。($10^{11}/4\pi$)という因子の中の($10^7/4\pi$)は，式(29), (30)からわかるように μ_0 に由来しているが，10^4 倍の違いは $\mathrm{m^2\ s^{-2}}$ と $\mathrm{cm^2\ s^{-2}}$ の比を反映している。式(54)の ε_0 を式(53)に代入して次式を得る。

---

[1] 物理量ではなく無次元の数値であることに注意する。IUPAC 発行の，I. Mills, T. Cvitaš, K. Homann, N. Kallay, and K. Kuchitsu, *Quantities, Units and Symbols in Physical Chemistry*, 2nd ed., Blackwell Science, Oxford, 1993. (同書は，表紙の色にちなんで「Green Book」と呼ばれている)の p. 110 に記されている“The constant ζ which occurs in some of the electromagnetic conversion factors in the (exact) pure number $2.99792458 \times 10^{10} = c_0/(\mathrm{cm\ s^{-1}})$”という記述に従って，本書でも「$\zeta$」を用いる。

$$F'\left(\frac{\mathrm{dyn}}{\mathrm{N}}\right)=\frac{1}{4\pi}\frac{4\pi\zeta^2}{10^{11}}\frac{q'_1 q'_2\left(\frac{\mathrm{esu}}{\mathrm{C}}\right)^2}{r'^2\left(\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{m}}\right)^2} \tag{55}$$

従って,

$$F'\left(\frac{1}{10^5}\right)=\frac{\zeta^2}{10^{11}\times 10^{-4}}\frac{q'_1 q'_2}{r'^2}\left(\frac{\mathrm{esu}}{\mathrm{C}}\right)^2 \tag{56}$$

さらに変形して,

$$F'=\frac{10^5\zeta^2}{10^{11}\times 10^{-4}}\frac{q'_1 q'_2}{r'^2}\left(\frac{\mathrm{esu}}{\mathrm{C}}\right)^2=\frac{\zeta^2}{10^2}\frac{q'_1 q'_2}{r'^2}\left(\frac{\mathrm{esu}}{\mathrm{C}}\right)^2 \tag{57}$$

この式から，CGS esu 系のクーロンの法則式(式(49))を抜き取ると(言い換えると，$F' = q'_1 q'_2 / r'^2$ を代入すると),

$$1=\frac{\zeta^2}{10^2}\left(\frac{\mathrm{esu}}{\mathrm{C}}\right)^2 \tag{58}$$

であるから,

$$\left(\frac{\mathrm{esu}}{\mathrm{C}}\right)^2=\frac{10^2}{\zeta^2} \tag{59}$$

つまり,

$$\frac{\mathrm{esu}}{\mathrm{C}}=\frac{10}{\zeta} \tag{60}$$

となり，単位間の換算として,

(電荷) $$\boxed{\mathrm{esu}=\frac{10}{\zeta}\mathrm{C}\ \text{または}\ \mathrm{C}=\frac{\zeta}{10}\mathrm{esu}} \tag{61}$$

が得られる。繰り返しになるが，ζが 2.99792458 × 10^{10} という大きさの無次元数であることに注意する。また，単位換算表などに，1 esu = 3.335641 × 10^{-10} C あるいは 1 C = 2.99792458×10^9 esu と書かれていることがあるが, これらの換算には物理法則が関係しているという意味で，1 m = 100 cm のような換算とは異なる換算である。

上記の C と esu の変換はあまりにも有名であり，換算表に頻繁に登場するものなので,

以下では，通常，あまり見かけない特殊なケースを扱うことにする。MKSA 系の C と CGS emu 系の電荷の単位の換算はどのようになるであろうか。CGS emu 系の電荷の単位には名前がないので，ここでは単に「emu 電荷」と書くことにする。まず，MKSA 系でのクーロンの法則は，

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{62}$$

一方，CGS emu 系でのクーロンの法則は，

$$F' = \frac{1}{\varepsilon'_0}\frac{q'_1 q'_2}{r'^2} \tag{63}$$

である。前回のケースと同様に式(62)を数値方程式として変形していくと，

$$F'\left(\frac{\mathrm{dyn}}{\mathrm{N}}\right) = \frac{1}{4\pi}\frac{4\pi\zeta^2}{10^{11}}\frac{q'_1 q'_2\left(\dfrac{\mathrm{emu電荷}}{\mathrm{C}}\right)^2}{r'^2\left(\dfrac{\mathrm{cm}}{\mathrm{m}}\right)^2} \tag{64}$$

となる。式(28)にもとづいて，ε'_0 の大きさが $1/\zeta^2$ であることを考慮すると，

$$F'\left(\frac{1}{10^5}\right) = \frac{1}{10^{11}\times\varepsilon'_0\times 10^{-4}}\frac{q'_1 q'_2}{r'^2}\left(\frac{\mathrm{emu電荷}}{\mathrm{C}}\right)^2 \tag{65}$$

つまり，

$$F' = \frac{10^5}{10^{11}\times\varepsilon'_0\times 10^{-4}}\frac{q'_1 q'_2}{r'^2}\left(\frac{\mathrm{emu電荷}}{\mathrm{C}}\right)^2 = \frac{1}{10^2}\frac{1}{\varepsilon'_0}\frac{q'_1 q'_2}{r'^2}\left(\frac{\mathrm{emu電荷}}{\mathrm{C}}\right)^2 \tag{66}$$

この式から，CGS emu 系のクーロンの法則の数値方程式(式(63))を抜き取ると，

$$1 = \frac{1}{10^2}\left(\frac{\mathrm{emu電荷}}{\mathrm{C}}\right)^2 \tag{67}$$

であるから，

$$\left(\frac{\mathrm{emu電荷}}{\mathrm{C}}\right)^2 = 10^2 \tag{68}$$

つまり，

$$\frac{\text{emu電荷}}{\text{C}} = 10 \tag{69}$$

となり，単位の換算として，

$$(\text{電荷}) \quad \boxed{\text{emu電荷} = 10\,\text{C} \ \text{または}\ \text{C} = \frac{\text{emu電荷}}{10}} \tag{70}$$

が得られる。このように，あまり見かけない単位の換算でも簡単に行うことができる。

ここまで電気量の方を中心に扱ってきたので，次は，MKSA 系の磁気量 Wb(= N A^{-1} m) と CGS emu 系の磁気量(emu)のあいだの換算を行ってみる。単位換算の問題は ***E*–*H*** 対応か ***E*–*B*** 対応かにはよらないので，比較的理解しやすい ***E*–*H*** 対応で考えることにする。MKSA 系の磁気のクーロンの法則は，

$$F = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{q_{\text{m}1}q_{\text{m}2}}{r^2} \tag{71}$$

であり，CGS emu 系では，

$$F' = \frac{q'_{\text{m}1}\,q'_{\text{m}2}}{r'^2} \tag{72}$$

である。これまでと同様の手順で変形を進めると，

$$F'\left(\frac{\text{dyn}}{\text{N}}\right) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{4\pi\times10^{-7}}\frac{q'_{m1}\,q'_{m2}\left(\dfrac{\text{emu}}{\text{Wb}}\right)^2}{r'^2\left(\dfrac{\text{cm}}{\text{m}}\right)^2} \tag{73}$$

となる。ここで，μ_0 には $4\pi\times10^{-7}$(数値)を代入した。変形を続けると，

$$F'\left(\frac{1}{10^5}\right) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{4\pi\times10^{-7}\times10^{-4}}\frac{q'_{m1}\,q'_{m2}}{r'^2}\left(\frac{\text{emu}}{\text{Wb}}\right)^2 \tag{74}$$

さらに，

$$F' = \frac{10^5}{(4\pi)^2\times10^{-7}\times10^{-4}}\frac{q'_{m1}\,q'_{m2}}{r'^2}\left(\frac{\text{emu}}{\text{Wb}}\right)^2 = \frac{10^{16}}{(4\pi)^2}\frac{q'_{m1}\,q'_{m2}}{r'^2}\left(\frac{\text{emu}}{\text{Wb}}\right)^2 \tag{75}$$

となり，この式から，CGS emu 系でのクーロンの式(式(72))を抜き取ると，

$$\left(\frac{\mathrm{emu}}{\mathrm{Wb}}\right)^2 = \frac{(4\pi)^2}{10^{16}} \tag{76}$$

が残る。従って，

$$\frac{\mathrm{emu}}{\mathrm{Wb}} = \frac{4\pi}{10^8} \tag{77}$$

であるから，

$$\text{(磁荷)} \quad \boxed{\mathrm{emu} = \frac{4\pi}{10^8}\,\mathrm{Wb} \text{ または } \mathrm{Wb} = \frac{10^8}{4\pi}\,\mathrm{emu}} \tag{78}$$

が得られる。これが，磁気量に関する MKSA 系と CGS emu 系のあいだの換算である。

次に，CGS emu 系の磁束の単位 Mx(マクスウェル)と MKSA 系の磁束の単位 Wb のあいだの換算を考えてみよう。磁束Φは，磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を面積分したものであり，

$$\Phi = \int \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}\, dS \tag{79}$$

の関係があるから[1]，まず，磁束密度の単位換算から考える。MKSA 系での磁束密度 B は，真空中の場合，磁場 H と

$$B = \mu_0 H \tag{80}$$

で結ばれる。一方，CGS emu 系では$\mu_0 = 1$ であるから

$$B' = H' \tag{81}$$

である。これらのあいだの換算を行うために必要な，磁場 H と H' の単位換算をまだ行っていないので，先に磁場の単位換算を行うことにする。MKSA 系の磁場 H は式(34)より

$$H = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{q_m}{r^2} \tag{82}$$

と書け，単位は A m^{-1} である。一方，CGS emu 系での磁場H'は

$$H' = \frac{q'_m}{r'^2} \tag{83}$$

であり，単位は dyn emu^{-1} = dyn$^{1/2}$ cm^{-1}である(これには Oe(エルステッド)という名称が与えられている)。A m^{-1} と Oe の換算には q_m と q'_m つまり Wb と emu の換算が必要であるが，すでに式(78)で得たからその結果(emu = $4\pi \times 10^{-8}$ Wb)を利用すればよい。式(82)

[1] dS は面要素，$\boldsymbol{n}$ は面要素の単位法線ベクトル。

を変形すると，

$$H'\left(\frac{\mathrm{Oe}}{\mathrm{A\ m^{-1}}}\right)=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{4\pi\times10^{-7}}\frac{q'_m\left(\dfrac{\mathrm{emu}}{\mathrm{Wb}}\right)}{r'^2\left(\dfrac{\mathrm{cm}}{\mathrm{m}}\right)^2} \tag{84}$$

となり，既知の単位換算を利用すると，

$$H'\left(\frac{\mathrm{Oe}}{\mathrm{A\ m^{-1}}}\right)=\frac{4\pi\times10^{-8}}{(4\pi)^2\times10^{-7}\times10^{-4}}\frac{q'_m}{r'^2} \tag{85}$$

従って，

$$\frac{\mathrm{Oe}}{\mathrm{A\ m^{-1}}}=\frac{10^3}{4\pi} \tag{86}$$

つまり，

$$\text{(磁場の強さ)}\quad \boxed{\mathrm{Oe}=\frac{10^3}{4\pi}\mathrm{A\ m^{-1}}\ \ \text{または}\ \ \mathrm{A\ m^{-1}}=\frac{4\pi}{10^3}\mathrm{Oe}} \tag{87}$$

を得る。これで，磁場の単位換算ができたので，次は，磁束密度の換算を行う。磁束密度には MKSA 系，CGS emu 系いずれにおいても単位に名称が与えられており，前者は T(テスラ)，後者は G(ガウス)である。従って，式(80)は

$$B'\left(\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{T}}\right)=4\pi\times10^{-7}H'\left(\frac{\mathrm{Oe}}{\mathrm{A\ m^{-1}}}\right) \tag{88}$$

と変形され，直前の H に関する換算の結果(式(87))を適用した

$$B'\left(\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{T}}\right)=4\pi\times10^{-7}\times\frac{10^3}{4\pi}H'=10^{-4}H' \tag{89}$$

から CGS emu 系の式 $B'=H'$ (式(81))を抜き取れば，

$$\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{T}}=10^{-4} \tag{90}$$

従って，G と T の関係

$$\text{(磁束密度)}\quad \boxed{\mathrm{G}=10^{-4}\mathrm{T}\ \text{または}\ \mathrm{T}=10^{4}\mathrm{G}} \tag{91}$$

が得られる。以上で，当初の目的であった磁束の換算を行う準備がすべて整った。

磁束を表す式は式(79)に示した

$$\Phi = \int \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}\, dS \tag{92}$$

であるから, MKSA 系の磁束の単位 Wb と CGS emu 系の磁束の単位 Mx の換算を行うために式(92)を変形すると,

$$\Phi'\left(\frac{\mathrm{Mx}}{\mathrm{Wb}}\right) = \int \boldsymbol{B}'\left(\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{T}}\right) \cdot \boldsymbol{n}\, dS'\left(\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{m}^2}\right) \tag{93}$$

となる。G と T の換算は式(91)より $\mathrm{G} = 10^{-4}\ \mathrm{T}$ であるから,

$$\Phi'\left(\frac{\mathrm{Mx}}{\mathrm{Wb}}\right) = 10^{-4} \times 10^{-4} \int \boldsymbol{B}' \cdot \boldsymbol{n}\, dS' \tag{94}$$

これより,

$$\frac{\mathrm{Mx}}{\mathrm{Wb}} = 10^{-8} \tag{95}$$

つまり,

$$(\text{磁束})\quad \boxed{\mathrm{Mx} = 10^{-8}\,\mathrm{Wb} \quad \text{または} \quad \mathrm{Wb} = 10^{8}\,\mathrm{Mx}} \tag{96}$$

が得られる。ここで，MKSA 系では，次元が同じである磁気量と磁束が両方とも Wb という名称で呼ばれるが，CGS emu 系では磁束にのみ Mx という単位名称があるだけで磁気量には名称がないことに注意する。MKSA 系と同様に，CGS emu 系の磁気量にも Mx という名称を付けてもよいと考えるかもしれないが，<u>磁気量間の換算</u>は,

$$\mathrm{Wb} = \frac{10^8}{4\pi}\,\mathrm{emu} \tag{97}$$

であり，<u>磁束間の換算</u>は,

$$\mathrm{Wb} = 10^{8}\,\mathrm{Mx} \tag{98}$$

であるから，磁気量間の換算と磁束間の換算係数は同じにならず，4π分の違いがある。

§4 異なる単位系での式表現

前節では，単位の換算を扱ったが，単位系間で式の変換を行うにはどうすればいいであろうか，たとえば，§1 で示したマクスウェルの方程式の 1 つである式(13)は，MKSA 系では,

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{99}$$

と表されるが，この式を Gauss 系の表記にする方法を考えてみよう。この式の場合は，あらゆる単位系に対応できる式(7)と表 1 を使えば，任意の単位系での形を知ることができるが，ここでは式(7)のような一般形が与えられていないとして考える。実は，式の変換に関して新しい方法を考案する必要はなく，すでに述べた単位換算の原理を使えばよいのであるが[1]，以下でその手順を具体的に見ていくことにする。

式(99)の中の∇も E も B も最終的に式の中に残すものであるから，これらの単位換算を把握しておく必要がある。Gauss 系では，電気に関する量を CGS esu 単位で扱うから(表 1)，電場については，これまでと同様の方法で，MKSA 系の電場(E)と Gauss 系の電場(E')の単位換算を行えばよい。MKSA 系の電場 E は(式(33)の形を参考にして)

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \tag{100}$$

であり，Gauss 系の電場E'は

$$E' = \frac{q'}{r'^2} \tag{101}$$

である。ここで，E の単位を「MKSA 電場」，E'の単位を「esu 電場」と書いて，式(100)を変形すると，

$$E'\left(\frac{\text{esu電場}}{\text{MKSA電場}}\right) = \frac{1}{4\pi}\frac{4\pi\zeta^2}{10^{11}}\frac{q'\left(\dfrac{\text{esu電荷}}{\text{C}}\right)}{r'^2\left(\dfrac{\text{cm}}{\text{m}}\right)^2} \tag{102}$$

となり，式(61)を利用して

$$E'\left(\frac{\text{esu電場}}{\text{MKSA電場}}\right) = \frac{4\pi\zeta^2\times 10}{4\pi\times 10^{11}\times\zeta\times 10^{-4}}\frac{q'}{r'^2} = \frac{\zeta}{10^6}\frac{q'}{r'^2} \tag{103}$$

と変形できるから，これより式(101)を抜き取ると

$$\text{MKSA電場}(\text{N C}^{-1}) = \frac{10^6}{\zeta}\text{esu電場}(\text{dyn}^{1/2}\ \text{cm}^{-1}) \tag{104}$$

が得られる。単位と数値(観測値)には反傾性があることから E とE'の関係として，

[1] 単位と数値(観測値)の反傾的関係を利用する。

$$E = \frac{\zeta}{10^6} E' \tag{105}$$

が得られる(プライム記号(')を付けたものが CGS esu 系の電場である)。また，磁場に関しても，B の単位である T と B' の単位である G のあいだには,

$$\mathrm{T} = 10^4 \mathrm{G} \tag{106}$$

の関係(式(91))があるから，B と B' の関係は,

$$B = 10^{-4} B' \tag{107}$$

となる。最後に，∇ をあらわに書くと,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \tag{108}$$

∇ の単位が m^{-1}，∇' の単位が cm^{-1} であることがわかり，$\mathrm{m}^{-1} = 10^{-2}\ \mathrm{cm}^{-1}$ より,

$$\nabla = 10^2 \nabla' \tag{109}$$

となる。これら(式(105), (107), (109))を MKSA 系の式(式(99))に代入すると,

$$10^2 \nabla' \times \frac{\zeta}{10^6} \boldsymbol{E}' = -10^{-4} \frac{\partial \boldsymbol{B}'}{\partial t} \tag{110}$$

$$\nabla' \times \boldsymbol{E}' = -\frac{1}{\zeta} \frac{\partial \boldsymbol{B}'}{\partial t} \tag{111}$$

が得られる。この数値方程式の各文字に Gauss 系として付ける単位は，∇' が cm^{-1}，$\boldsymbol{E}'$ が $\mathrm{g}^{1/2}\mathrm{cm}^{-1/2}\mathrm{s}^{-1}$，$\boldsymbol{B}'$ は $\mathrm{g}^{1/2}\mathrm{cm}^{-1/2}\mathrm{s}^{-1}$, t は s であるから，ζには $\mathrm{cm\ s}^{-1}$ という単位が付くことになる。ζは $2.99792458 \times 10^{10}$ という数値であるが，これに $\mathrm{cm\ s}^{-1}$ という単位を付けると真空中の光速になるから，式(111)を物理量の関係式にするには，ζを c_0 と書けばよい。従って，Gauss 系で表した Maxwell の方程式(のうちの式(13)にあたるもの)として,

$$\nabla' \times \boldsymbol{E}' = -\frac{1}{c_0} \frac{\partial \boldsymbol{B}'}{\partial t} \tag{112}$$

が得られる。この結果は，表 1 を利用して式(7)を Gauss 系の式として表したものと一致している。

MKSA 系と Gauss 系のクーロンの法則式の比較から，「MKSA 系で書かれた式を Gauss 系で書かれた式に書き換えるには，MKSA 系の式に現れる $4\pi\varepsilon_0$ の部分を 1 に置き換えればよい」というような “ 対処療法 ” 的方法を記した解説を目にすることがあるが，この方法がいかに危険であるかがわかるであろう(そもそも，式(99)には $4\pi\varepsilon_0$ がないので対処療法が使えない)。逆に，式の中に埋もれている「1」を見つけることは到底不可能であるから，単なる文字や数字の置き換えだけで式変形ができると考えてはならない。

次に，単位系間の式の変換の例として，MKSA 系の磁気モーメントを Gauss 系で表すことを考えてみる。電子の軌道角運動量 $\boldsymbol{l}$ にもとづく磁気モーメントは，MKSA 系で $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応の場合，次のような表記になる。

$$\boldsymbol{m}_{\mathrm{H}} = -\frac{\mu_0 e}{2m_{\mathrm{e}}}\boldsymbol{l} \quad (\boldsymbol{E}\text{–}\boldsymbol{H}\ \text{対応}) \tag{113}$$

ここで，e は電気素量(電子の電荷の大きさで，ここでは $e > 0$ にとる)，m_{e} は電子の質量であり，右辺の負号は電子の電荷が負であることに対応している。式中の μ_0 は真空透磁率($4\pi \times 10^{-7}$ N A^{-2})であり，$\boldsymbol{m}_{\mathrm{H}}$ の単位は N A^{-1} m^2(= Wb m)である。なお，$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応の磁気モーメントを $\boldsymbol{m}_{\mathrm{B}}$ と記すと

$$\boldsymbol{m}_{\mathrm{B}} = -\frac{e}{2m}\boldsymbol{l} \quad (\boldsymbol{E}\text{–}\boldsymbol{B}\ \text{対応}) \tag{114}$$

となり，単位が $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応とはまったく異なる A m^2 となることに注意する。つまり，$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応の磁荷に $1/\mu_0$ が掛けられたことに対応して，$\boldsymbol{m}_{\mathrm{H}}$ に $1/\mu_0$ が掛けられた形になっている(式(40)および式(45)参照)。MKSA 系での磁気モーメントの単位は Wb m であり，これを Gauss 系に変換するには，Wb を emu cm(= dyn$^{1/2}$ cm^{-1})に変換すればよい。Wb と emu の変換はすでに式(78)で得たから，

$$\mathrm{Wb\ m} = \frac{10^8}{4\pi}\mathrm{emu\ m} = \frac{10^{10}}{4\pi}\mathrm{emu\ cm} \tag{115}$$

となり，

$$\boldsymbol{m}_{\mathrm{H}} = \frac{4\pi}{10^{10}}\boldsymbol{m}'_{\mathrm{H}} \tag{116}$$

が得られる。Gauss 系は電荷については esu を用いるので，式(61)の

$$\mathrm{C} = \frac{\zeta}{10}\mathrm{esu} \tag{117}$$

より

$$e = \frac{10}{\zeta}e' \tag{118}$$

となる。質量 m_{e} は MKSA 系では kg，Gauss 系では g であるから，kg = 10^3 g より，

$$m_{\mathrm{e}} = 10^{-3}m'_{\mathrm{e}} \tag{119}$$

となる。さらに，角運動量 l は MKSA 系では kg m^2 s^{-1}，Gauss 系では g cm^2 s^{-1} であるから，kg m^2 s^{-1} = 10^7 g cm^2 s^{-1} より，

$$\boldsymbol{l} = 10^{-7}\boldsymbol{l}' \tag{120}$$

を得る。式(116), (118), (119), (120)を式(113)に代入すると,

$$\frac{4\pi}{10^{10}}\boldsymbol{m}' = -\frac{4\pi\times10^{-7}}{2}\frac{\frac{10}{\zeta}e'}{10^{-3}m'_{\mathrm{e}}}10^{-7}\boldsymbol{l}' \tag{121}$$

となり，これを整理して,

$$\boldsymbol{m}'_{\mathrm{H}} = -\frac{e'}{2m'\zeta}\boldsymbol{l}' \tag{122}$$

を得る。それぞれの文字に単位を付けて考えると，ζは真空中の光速 c_0 に置き換えられるから，最終的に，Gauss 系での磁気モーメントを表す式として

$$\boldsymbol{m}'_{\mathrm{H}} = -\frac{e'}{2m'c_0}\boldsymbol{l}' \tag{123}$$

が得られる。式(123)は式(113)とまったく同じ物理量を表しているが，一見しただけでは同じ物理量とは思えないくらい異なった形をしている。

以上のように，単位と数値の反傾性を利用して，希望する単位系で書かれた式表現を得ることができる。最後に，代表的 4 単位系の単位をまとめたものを表 2 から表 5 に示す。

表 2. MKSA 単位系(有理 4 元系) ($\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応)

物理量	記号	名称	単位			
電荷	q	ｸｰﾛﾝ(C)	C			
誘電率	ε	—	$N^{-1}\ C^{2}\ m^{-2}$	$kg^{-1}\ m^{-3}\ C^{2}\ s^{2}$		
電場	$\boldsymbol{E}$	—	$N\ C^{-1}$	$kg\ m\ C^{-1}\ s^{-2}$	$V\ m^{-1}$	
電束密度	$\boldsymbol{D}$	—	$C\ m^{-2}$			
双極子ﾓｰﾒﾝﾄ	μ	※	C m			
磁荷(磁気量)	q_{m}	ｳｪｰﾊﾞ(Wb)	$N\ A^{-1}\ m$	$kg\ m^{2}\ C^{-1}\ s^{-1}$	V s	H A
磁束	Φ	ｳｪｰﾊﾞ(Wb)	$N\ A^{-1}\ m$	$kg\ m^{2}\ C^{-1}\ s^{-1}$	V s	H A
透磁率	μ	—	$N\ A^{-2}$	$kg\ m\ C^{-2}$	$Wb^{2}\ N^{-1}\ m^{-2}$	$H\ m^{-1}$
磁場	$\boldsymbol{H}$	—	$A\ m^{-1}$	$N\ Wb^{-1}$		
磁束密度	$\boldsymbol{B}$	ﾃｽﾗ(T)	$N\ A^{-1}\ m^{-1}$	$Wb\ m^{-2}$		
磁気ﾓｰﾒﾝﾄ	$\boldsymbol{m}_{\mathrm{H}}$	—	$N\ A^{-1}\ m^{2}$	Wb m		

・真空透磁率：$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$ N A^{-2}
・真空誘電率：$\varepsilon_0 = 1/(\mu_0 c_0^2) = 10^{11}/(4\pi\zeta^2)$ $N^{-1}\ C^{2}\ m^{-2}$
c_0 は真空中の光速(次元あり)。ζは cm s^{-1} 単位での真空中の光速の値(無次元)。
・ $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応では $\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}_{\mathrm{H}}$，$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応では $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}/\mu_0 - \boldsymbol{M}_{\mathrm{B}}$ ($\boldsymbol{M}_{\mathrm{H}}$，$\boldsymbol{M}_{\mathrm{B}}$ はそれぞれ $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応と $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応での磁化)。
・$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応での磁荷は$\xi = q_{\mathrm{m}}/\mu_0$ であり，単位は A m。
・$\boldsymbol{m}_{\mathrm{H}}$ は $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応の磁気モーメント。$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応の磁気モーメントは$\boldsymbol{m}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{m}_{\mathrm{H}}/\mu_0$ で定義され，単位は A m^{2}。
・インダクタンスの単位：H(ヘンリー) = N m A^{-2} = kg m^{2} C^{-2} = V A^{-1} s = Wb A^{-1}

- -

・電荷：C(クーロン) = (ζ/10) esu = (ζ/10) Fr(フランクリン)
・磁束：Wb(ウェーバ) = 10^{8} Mx(マクスウェル)
・磁場：A m^{-1} = $(4\pi/10^{3})$ Oe(エルステッド)
・磁束密度：T(テスラ) = 10^{4} G(ガウス)
※ 双極子モーメントに対して D(デバイ)という単位が使われることがあるが D = C m ではない。D(デバイ)はもともと CGS esu の双極子モーメントの単位(esu cm)に対して D = 10^{-18} esu cm として定義されたものであり SI 単位ではない。D = 10^{-18} esu cm = $(10^{-18})(10/\zeta)(10^{-2})$ C m = $(10^{-19}/\zeta)$ C m = $3.335640\ldots\times10^{-30}$ C m である。

表 3. CGS esu(CGS 静電単位系)(非有理 3 元系)

物理量	記号	名称	単位		
電荷	q	ﾌﾗﾝｸﾘﾝ(Fr)	esu	$\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}$	$\mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{3/2}\ \mathrm{s}^{-1}$
誘電率	ε	―	-	-	-
電場	$\boldsymbol{E}$	―	$\mathrm{dyn\ esu}^{-1}$	$\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1}$	$\mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1/2}\ \mathrm{s}^{-1}$
電束密度	$\boldsymbol{D}$	―	$\mathrm{dyn\ esu}^{-1}$	$\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1}$	$\mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1/2}\ \mathrm{s}^{-1}$
双極子ﾓｰﾒﾝﾄ	μ	―	esu cm	$\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{2}$	$\mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{5/2}\ \mathrm{s}^{-1}$
磁荷(磁気量)	q_{m}	―		$\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{s}$	$\mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{1/2}$
磁束	Φ	―		$\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{s}$	$\mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{1/2}$
透磁率	μ	―	$\mathrm{cm}^{-2}\ \mathrm{s}^{2}$		
磁場	$\boldsymbol{H}$	―		$\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{s}^{-1}$	$\mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{1/2}\ \mathrm{s}^{-2}$
磁束密度	$\boldsymbol{B}$	―		$\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-2}\ \mathrm{s}$	$\mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-3/2}$
磁気ﾓｰﾒﾝﾄ	$\boldsymbol{m}$	―		$\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm\ s}$	$\mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{3/2}$

・真空誘電率：$\varepsilon_0 = 1$ (無次元)

・真空透磁率：$\mu_0 = 1/c_0^2 = 1.11265\ldots \times 10^{-21}\ \mathrm{cm}^{-2}\ \mathrm{s}^{2}$

表 4. CGS emu(CGS 電磁単位系)(非有理 3 元系)

物理量	記号	名称	単位		
電荷	q	—		$\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{s}$	$\mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{1/2}$
誘電率	ε	—	$\mathrm{cm}^{-2}\ \mathrm{s}^{2}$		
電場	$\boldsymbol{E}$	—		$\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{s}^{-1}$	$\mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{1/2}\ \mathrm{s}^{-2}$
電束密度	$\boldsymbol{D}$	—		$\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-2}\ \mathrm{s}$	$\mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-3/2}$
双極子ﾓｰﾒﾝﾄ	μ	—		$\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm\ s}$	$\mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{3/2}$
磁荷(磁気量)	q_{m}	—	emu	$\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}$	$\mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{3/2}\ \mathrm{s}^{-1}$
磁束	Φ	ﾏｸｽｳｪﾙ(Mx)	emu	$\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}$	$\mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{3/2}\ \mathrm{s}^{-1}$
透磁率	μ	—	-	-	-
磁場	$\boldsymbol{H}$	ｴﾙｽﾃｯﾄﾞ(Oe)	$\mathrm{dyn\ emu}^{-1}$	$\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1}$	$\mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1/2}\ \mathrm{s}^{-1}$
磁束密度	$\boldsymbol{B}$	ｶﾞｳｽ(G)	$\mathrm{dyn\ emu}^{-1}$	$\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1}$	$\mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{-1/2}\ \mathrm{s}^{-1}$
磁気ﾓｰﾒﾝﾄ	$\boldsymbol{m}$	—	emu cm	$\mathrm{dyn}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{2}$	$\mathrm{g}^{1/2}\ \mathrm{cm}^{5/2}\ \mathrm{s}^{-1}$

・真空透磁率：$\mu_0 = 1$ (無次元)
・真空誘電率：$\varepsilon_0 = 1/c_0^2 = 1.11265\ldots \times 10^{-21}\ \mathrm{cm}^{-2}\ \mathrm{s}^{2}$
・G(ガウス) = Mx cm^{-2}
・電流に Bi(ビオ)という名称の単位がある。Bi(ビオ) = 10 A

表 5. Gauss 単位系(非有理 3 元系)

物理量	記号	名称	単位		
電荷	q	ﾌﾗﾝｸﾘﾝ(Fr)	esu	$\mathrm{dyn}^{1/2}\,\mathrm{cm}$	$\mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{cm}^{3/2}\,\mathrm{s}^{-1}$
誘電率	ε	—	-	-	-
電場	$\boldsymbol{E}$	—	$\mathrm{dyn}\,\mathrm{esu}^{-1}$	$\mathrm{dyn}^{1/2}\,\mathrm{cm}^{-1}$	$\mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{cm}^{-1/2}\,\mathrm{s}^{-1}$
電束密度	$\boldsymbol{D}$	—	$\mathrm{dyn}\,\mathrm{esu}^{-1}$	$\mathrm{dyn}^{1/2}\,\mathrm{cm}^{-1}$	$\mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{cm}^{-1/2}\,\mathrm{s}^{-1}$
双極子ﾓｰﾒﾝﾄ	μ	—	esu cm	$\mathrm{dyn}^{1/2}\,\mathrm{cm}^{2}$	$\mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{cm}^{5/2}\,\mathrm{s}^{-1}$
磁荷(磁気量)	q_{m}	—	emu	$\mathrm{dyn}^{1/2}\,\mathrm{cm}$	$\mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{cm}^{3/2}\,\mathrm{s}^{-1}$
磁束	Φ	ﾏｸｽｳｪﾙ(Mx)	emu	$\mathrm{dyn}^{1/2}\,\mathrm{cm}$	$\mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{cm}^{3/2}\,\mathrm{s}^{-1}$
透磁率	μ	—	-	-	-
磁場	$\boldsymbol{H}$	ｴﾙｽﾃｯﾄﾞ(Oe)	$\mathrm{dyn}\,\mathrm{emu}^{-1}$	$\mathrm{dyn}^{1/2}\,\mathrm{cm}^{-1}$	$\mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{cm}^{-1/2}\,\mathrm{s}^{-1}$
磁束密度	$\boldsymbol{B}$	ｶﾞｳｽ(G)	$\mathrm{dyn}\,\mathrm{emu}^{-1}$	$\mathrm{dyn}^{1/2}\,\mathrm{cm}^{-1}$	$\mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{cm}^{-1/2}\,\mathrm{s}^{-1}$
磁気ﾓｰﾒﾝﾄ	$\boldsymbol{m}$	—	emu cm	$\mathrm{dyn}^{1/2}\,\mathrm{cm}^{2}$	$\mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{cm}^{5/2}\,\mathrm{s}^{-1}$

・真空誘電率：ε_0 =1 (無次元)

・真空透磁率：μ_0 = 1 (無次元)

参考文献

1. 鈴木範人，小塩高文「応用光学 II」(朝倉書店，1982) pp. 152～156
同書の表 4.1 および表 4.2 に，単位系のあいだの関係がまとめられている。2 つの表は ***E*–*H*** 対応と ***E*–*B*** 対応にも配慮されており，任意の単位系での電磁気学の理論式を簡単に知ることができる素晴らしい表である。さらに，「(MKSA 系が)どの面からも理想的にできているかというとなかなかそうはいかない」と述べて MKSA 系の欠点を指摘するとともに，新しい MKSP 系という単位系(＝MKSA 系と Gauss 系の長所を組み合わせた単位系)を紹介している。

2. 広瀬立成「***E*** と ***H***，***D*** と ***B***」(共立出版，1981) pp. 23～36
同書 p. 23 に書かれているように「電気的な量と磁気的な量の対応のよさを第一に考えて」基本的に ***E*–*H*** 対応の立場で書かれており，書名もそれを反映しているが，***E*–*H*** 対応と ***E*–*B*** 対応の関係に関する丁寧な解説がある。

3. 「世界大百科事典」(平凡社，1972)
見出し「単位」を参照。専門書ではないものの，電磁気単位系の話が丁寧に解説されている。文献 1.と類似の表(第 2 表)が掲載されており，それぞれの単位系での基本量や定義がわかりやすく記述されている。また，単位系の単位同士の数値比をまとめた表(第 4 表)は，他に例を見ない貴重なもので，本書で示した単位系間の式変換を機械的に行う場合にきわめて有効である。ただし，出版年によっては，該当する表が掲載されていないので注意が必要である[1]。

4. A. Sommerfeld(伊藤大介 訳)「理論物理学講座 3 電磁気学」(講談社，1982) pp. 433～441 (付録：初学者のための準備)
単位と測定値(数値)の反傾的関係の一般論を解説し，電磁気学の理論式を各単位系に合わせて変換するための独創的な方法が紹介されている。ただし，式変形の方向を決める際の「単純性の要請」はやや曖昧で説得力が弱い印象を受ける。(たとえば，Gauss 系は，もともと誘電率と透磁率を無次元としたので，そのしわよせとして式変換の際出てくる光速を物理量として残さなければならないこと，あるいはその逆に，Gauss 系から変換するときには，光速は数値化されて残す変数以外の定数部分に含めてしまう必要がある，ということが明確に記述されていない。)

[1] 筆者自身が掲載を確認したのは，1972 年 4 月 25 日初版のみ。

電磁気学における単位系

1983年	10月	3日	初版第1刷
1991年	8月	22日	第2版第1刷
1993年	6月	20日	第3版第1刷
1999年	2月	7日	第4版第2刷
2005年	7月	31日	第5版第6刷
2007年	5月	20日	第6版第1刷

著者 山﨑 勝義
発行 漁火書店
検印 山﨑

印刷 ブルーコピー
製本 ホッチキス